

FIX-projektet

Varierade övningsuppgifter i matematik

Jörgen Löfström

18 april 1995

Inledning

Detta är en rapport om ett pedagogiskt projekt som har finansierats av Göteborgs Universitet. Projektet har kommit att kallas FIX-projektet p.g.a. ett olyckligt infall. FIX står för förståelseinriktad examination och namnet var tänkt som en ironisk ordlek i avvaktan på ett bättre namn. Något sådant hittade jag dock inte.

Projektets syfte

Arbetet med övningsuppgifter utgör en central del i studenternas studier och i traditionell examination. Detta innebär att lärarna genom utformning och val av övningsuppgifter och examination kan påverka studenternas studier. Syftet med projektet är att inom ramen för traditionella planeringsramar experimentera med olika typer av övningsuppgifter och tentamensuppgifter. Tanken är att påverka studenternas lärande genom arbetsuppgifter som utvecklar förståelsen av matematiska begrepp och metoder. Detta skall bland annat uppnås genom att man ställer enkla och grundläggande och varierade frågor, gärna utformade så att initiativet överlämnas till de studerande. Projektet har genomförts på två kurser nämligen Flervariabelanalys, del 1, under VT 94 och VT 95, samt Algebra, del 2 (vanligen kallad Linjär Algebra) under HT 94. Jag har själv varit ansvarig för uppläggning och examination på dessa kurser.

Disposition

1. Matematikutbildningens förutsättningar
Beskriver hur utbildningen ser ut i stora drag. Detta avsnitt är främst tänkt för en utanförstående läsare.
2. Vad är matematik
Beskriver några särmerken hos matematikämnet som har betydelse för fortsättningen.
3. Undervisning och examination
Beskriver hur undervisning och examination brukar gå till. Speciellt kommenteras övningsuppgifternas betydelse i undervisningen.
4. Varierade övningsuppgifter i matematik
Detta är rapportens huvuddel. Den beskriver olika typer av övningsuppgifter och deras syften, huvudsakligen genom att ge exempel.
5. Tentamensuppgifter
Detta avsnitt innehåller en exemplifierad diskussion om vilka variationsmöjligheter som kan finnas inom ramen för den traditionella examinationen.
6. Två praktiska försök
Här beskrivs och utvärderas de försök som jag har gjort under det senaste året.
7. Utvärdering av projektet

1 Matematikutbildningens förutsättningar

Här följer ett försök till bakgrundsteckning. Texten handlar huvudsakligen nybörjarutbildningen i matematik på universitetsnivå. Strävan har varit att det som sägs skall ha ett mått av allmängiltighet, men troligen finns det åtskilliga formuleringar som präglas av författarens personliga erfarenheter.

Stabilitet och konjunktursvängningar

De yttre förutsättningarna för universitetets matematikutbildning har genom åren svängt kraftigt med den ekonomiska konjunkturen. Antalet nybörjare har varierat från en lägsta nivå på något hundratal till dagens nivå på över sex hundra. Att man klarat av dessa stora och även snabba fluktationer beror på att grundutbildningen i matematik sköts av en av landets största högskoleinstitutioner, den med Chalmers gemensamma matematiska institutionen. Detta har gett en buffert som dämpat konjunktursvängningarna.

Bortser man från tillströmningen av studerande framstår de yttre förutsättningarna som betydligt stabilare. Antalet lärare vid institutionen har vuxit i takt med Chalmersutbildningens ökning och anslagen från universitetet har beräknats enligt tryggt konserverande budgetformler. Omvärldens bild av matematikämnet har inte heller rubbats i nämnvärd grad. Det är bilden av ett exklusivt ämne i universitetsutbildningens utkant, ett ämne där undervisningen bedrivs med krita och tavla och där knappt ens det behövs. Datorer använder vi alla, blir svaret när någon pekar på ämnets ändrade förutsättningar. Som en följd av detta har undervisningen varit organiserad i huvudsak på samma sätt under de gångna decennierna, även om nya undervisningsformer prövats och datorlaborationer införts här och var.

Undervisningens organisation

Organisationen av undervisningen ser ut ungefär så här för en nybörjarkurs i matematik:

tolv undervisningstimmar per poäng,
en fempoängskurs undervisas på åtta veckor halvfart,
åtta timmars undervisning per kurs och vecka,
fyra timmars föreläsning i stor grupp (ett till två hundra studenter),
fyra timmars undervisning i liten grupp (tjugo till trettio studenter),
eventuellt någon enstaka datorlaboration.

Undervisningen på en fempoängskurs för etthundrafemtio studenter omfattar alltså cirka tvåhundra undervisningstimmar.

Kursen avslutas med en fem timmars tentamensskrivning, bestående av problemuppgifter av det slag som behandlats i kurslitteraturen samt ett par teorifrågor. Det normala är att cirka sextio procent av de som skriver vid första provtillfället klarar sig över gränsen för godkänt, men bortfallet fram dit är stort. Man kan räkna med att examinationen kostar vad som skulle svara mot ungefär femtio undervisningstimmar.

Bristen på individualisering

En enkel aritmetisk övning är tillräcklig för att övertyga läsaren om att det inte är möjligt att inom den ovan beskrivna ramen införa omfattande moment av individualiserad undervisning. Bristen på sådana undervisningsformer är en viktig förklaring till att studenterna klarar kurserna dåligt. Det är också en viktig förklaring till lärarnas otillräckliga kunskaper om studenternas uppfattningar och kunskapssyn. De laborativa ämnenas laborationer har en av sina främsta pedagogiska poänger just i momentet av individualisering och denna individualisering bidrar till den bättre genomströmningen i dessa ämnen. Det

finns naturligtvis också en annan delförklaring till de laborativa ämnenas framgång vad det gäller genomströmning, nämligen dessa ämnens rekryteringssituation. I fysik, kemi och biologi tillämpar man spärrar, något som inte förekommer i matematik.

Studenternas skiftande bakgrund

Det finns alltså ännu en viktig förutsättning som bör nämnas här, nämligen rekryteringen av studenter till grundkurserna i matematik. Universitetets ledning har genom åren ofta upprepat sin önskan att man om möjligt skall undvika spärrar. Matematikämnet tar av tradition emot alla behöriga studerande. Detta leder till att en mycket stor grupp studerande kommer till nybörjarkurser i matematik mer därför att de inte kommit in någon annanstans än för att de har ett genuint intresse för matematik eller ens ett långsiktigt mål med sin utbildning. Detta tunga lass av svagt motiverade och ganska vilsna studenter, ibland med svaga förkunskaper, utgör ett betydande problem särskilt under första terminens kurser. Man bör dock i rättvisans namn kontrastera denna grupp mot en annan stor grupp av studerande, nämligen de motiverade, entusiastiska och väl förberedda.

Utbildningens ständiga förnyelse

Man möter ofta frågan om det finns något mer att forska om i matematik. Den enorma flod av forskningsrapporter som väller in till matematiska institutionens bibliotek visar att svaret är ja. En annan vanlig missuppfattning är att om grundkurserna i matematik ser ut som de gjort i hundra år. Visserligen genomgår inte grundkurserna i matematik samma snabba förändring som kan vara fallet i en del andra ämnen. Grundkurserna i matematik har ett längre avstånd till aktuella forskningsfronter än de flesta andra ämnen. Likväl sker en ständig förändring av kursinnehåll och kursutformning. Detta är i hög utsträckning sant när det gäller universitetets grundkurser. Både innehåll och inriktning av dessa kurser har genomgått betydande förändringar de senaste decennierna. Mycket arbete har också lagts ned på utveckling av undervisningsformer och kurslitteratur. Det är därför berättigat att tala om universitetsutbildningens ständiga förnyelse, fast denna förnyelse har måst ske inom snäva materiella ramar. Vid en jämförelse med civilingenjörsutbildningen framstår universitetsutbildningen i matematik snarast som lätttrölig och experimentlysten.

Den matematiska kulturen och undervisningens traditioner

Omvärldens uppfattning av matematikämnet som exklusivt har sin motsvarighet inom den matematisk kulturen. Den typiske universitetsläraren i matematik är en ensamvarg. Som alla lärare strävar han efter att utbilda kopior av sig själv. I den matematiska kulturen hyllas det geniala greppet, den slående frågan och dess obegripliga svar. Att lösa knepiga problem framställs som en skön konst. För den uppväxande ungdomen anordnar man tävlingar i denna konst. Vinnarna utmålats som stora begåvningar, vilket de ofta nog visar sig vara. I den matematiska grundutbildningen tycks det enda riktigt accepterade sättet att fördjupa den matematiska försåelsen vara att knäcka problem, som någon annan har hittat på åt en, oavsett hur löjliga och artificiella de må vara.

Man kan ändå knappast säga att exklusivitet och tävlingsanda präglar undervisningen i matematik. Studentens ensamma kamp med texten och övningsuppgifterna antas emellertid dominera studierna. En alltför intensiv individuell handledning vore inte riktigt acceptabel. Kanske är tanken att man inte skall vara alltför ivrig att leda studenten till kunskapens källa, ty då lär han sig inte att hitta vägen dit själv. Det är säkert så att denna attityd delvis har kommit till av snöd nödvändighet. Det finns ju ändå inga resurser för individualisering. Men den är också en projektion av den matematiska kulturens traditioner, omvärldens syn på ämnet och lärarnas egna erfarenheter.

2 Vad är matematik

Matematikämnet är inte sådant som flertalet studenter väntar sig när de kommer till universitetet, så mycket kan man säkert säga. Många andra negativa bestämningar skulle kunna göras, men att tala om vad matematik verkligen är låter sig naturligtvis inte göras. Matematikämnet utvecklas hela tiden. Det är inte samma ämne i dag som i går. Men vissa saker tål att diskuteras. Detta avsnitt handlar om en del särmärken som är väsentliga för universitetets grundkurser i matematik.

Bra matematik och dålig

Bra matematik i grundutbildningen skall naturligtvis syssla med väsentliga problem, gärna med anknytning till den icke-matematiska omvärlden. En bra matematisk teori bör innehålla vissa viktiga moment.

- En diskussion av de centrala problem som teorin avser att lösa.
- De viktigaste begreppen som hör till teorin.
- De väsentligaste formella beteckningarna som används i teorin.
- Några grundläggande hjälpresultat som behövs för att verifiera viktiga egenskaper som är väsentliga inom teorin.
- Några oundgängliga och enkla räknemetoder.
- Teorins huvudresultat, enkelt men fullständigt formulerade.
- Argument som är ägnade att övertyga om de presenterade resultatens allmängiltighet.
- Exempel som visar hur teorins formelmaskineri och begreppsapparat fungerar.
- Exempel som visar hur teorins huvudresultat kan användas för att lösa de centrala problem som hör till teorin.

För läraren, bok-eller kompendieförfattaren är det alltså avgörande att han vet vad som är verkligt viktigt. Mycket kan gå förlorat om man i undervisningen eller textboken alltför snart ägnar sig åt att kommentera undantagsfall och anomalier eller om man alltför villigt kastar sig över teorins mer spännande generaliseringar. Det viktigaste inslaget i bra matematik är alltså satsningen på det primärt viktiga.

Att söka sammanhang

Det brukar framhållas som en särskild kvalitet om en student söker efter sammanhang inom eller utanför matematiken. En student kan vilja tolka en matematisk teori i ljuset av sina framtida ekonomistudier. Denna inställning kan vara honom till stor nytta. Det kan bidra till att motivera honom inför arbetet med en motspänstig matematisk teori. Den kan emellertid också ge honom problem, eftersom den kan leda honom till att endast ta till sig sådan matematik som han tror att han kommer att stöta på i sina framtida studier. Det gör honom i så fall oförberedd på det oväntade. En annan student kan vilja förstå en matematisk teori i geometriska (alltså inommatematiska) termer eller analogier. Detta förhållningssätt kan förvisso vara mycket fruktbart men det kan också leda till oöverstigliga problem och ge upphov till direkta missuppfattningar. Försök till exempel tolka räknescemat för division av två heltal i geometrisk bilder. En tredje student som i djupet av sitt hjärta tycker sig ha förstått ett antal ekvationer som handlar om fart och acceleration kan få problem med att tolka en annan ekvation som saknar en tolkning av detta slag.

Att söka sammanhang kan således vara både en svaghet och en styrka. Den studerande måste vara öppen inför det oväntade, han måste vara beredd att överge en del av sina invanda föreställningar. Det handlar ofta inte bara om att komplettera tidigare inre bilder utan just om att (åtminstone temporärt) överge dem till förmån för andra. Som

exempel kan man ta matematikens funktionsbegrepp. De flesta har från gymnasiet med sig uppfattning att en funktion är ett uttryck som t.ex. $\sqrt{x}$ eller möjligen en kurva. Denna uppfattning av funktionsbegreppet måste han steg för steg överge under sina inledande matematikstudier, till förmån för en rad andra föreställningar: funktion som svart låda, som avbildning (typ kartprojektion), som vektorfält (till exempel flöde i en vätska), som operator (till exempel deriveringsoperatoren), som stokastisk variabel o.s.v. Varje sådan ny tolkning av funktionsbegreppet kommer att ge honom svårigheter och drabba honom som en kulturchock. Visserligen behöver han kanske inte överge en tidigare uppfattning för all framtid, men medan chocken drar över honom måste han lämna det invanda tanke-mönstret.

Den matematiska definitionens magiska kraft

Matematikens begreppsbildning är krävande genom med sin höga precision. Bakom en matematisk definition ligger ofta ganska enkla tankar men samtidigt tankar som det tagit decennier att precisera och formulera med den efterstävade enkelheten och exaktheten. I matematiken har ordet "kontinuitet" en alldeles bestämd mening. Det betyder inte något allmänt i stil med "utan avbrott" eller "sammanhängande" som det gör i vardagsspråket. Studenterna brukar inte ha stora svårigheter med att uppfatta den grundläggande idén bakom någon av grundkursernas definitioner, men att förstå eller känna för definitionens exakta innebörd och formulering brukar bjuda på mycket stora problem. Om man frågar efter definitionen av växande funktion får man ofta ett svar som talar om hur man i ett konkret fall kan avgöra om en funktion är växande eller inte. Den exakta definitionen är studenten ofta omedveten om. Läraren kanske ger en levande beskrivning av innebörden och tillämpningen av ett matematiskt resultat och kommer sedan med det som egentligen är det viktiga för honom, nämligen det formella beviset, grundat på exakta definitioner och tidigare resultat. Föreläsaren känner det som om han tog ett stadigt tag i definitionerna och upplever hur dessa med en inneboende, magisk kraft, leder honom och hans studenter (tror han) genom beviset, fram till det triumfartade slutet "Vilket skulle bevisas!". Studenten förstår den målande beskrivningen av resultatet, men har kanske inte uppfattat att det finns något att bevisa.

Formelmanipulerandets djupdimension

Det brukar sägas att utbildningen skall syfta till förståelse av begreppsbildningen. Det måste man hålla med om. Matematikens teori och formelapparat syftar emellertid inte sällan till att automatisera tänkandet. När man för hand skall dividera två tal med varandra sätter man upp talen enligt något räknescema och tillämpar sedan automatiskt divisionsalgoritmens steg. Under tiden man utför kalkylerna bör man inte tänka på vad man gör, bara på att hålla sig till algoritmens regler. Förvisso kan det finnas skäl att någon gång i livet ha tänkt igenom varför man gör som man gör, men det är närmast ett hinder att tänka på det medan man utför kalkylerna.

Nu är division av tal ett extremt exempel. Vanligen består matematisk problemlösning av en blandning av tillämpning av färdiga formler och räkneregler å ena sidan och analys och konstruktioner å den andra. Så här kan det se ut : Här har jag en funktion. Jag vill veta i vilka intervall denna funktion är växande och bestämmer mig för att derivera den för att undersöka saken. Jag ser att funktionen är en produkt av två andra (analys). Jag tillämpar nu regeln för derivation av en produkt (algoritm). Nu ser jag derivatan i sin tur kan skrivas om som en ny produkt av två faktorer (analys och konstruktion). Jag kvadratkompletterar i den andra faktorn (algoritm) och nu kan jag precis avläsa i vilka intervall som derivatan är positiv (analys) o.s.v.

Strävan att automatisera tänkandet och räknandet kan uppfattas som en ytlig eller själlös sida av matematiken, men syftet är att spara tankearbete för att komma längre

med sådant som kan vara nytt och kräva kreativa insatser. På detta sätt är matematikens formelmanipulerande en väsentlig djupdimension i matematikämnet. Den kan kräva utantillslärande och disciplinerad färdighetsträning, men formelmanipulerandet är inte ett självändamål. Syftet är att ge plats för det viktiga, det som kräver ny intellektuell kraft.

Djupinriktning kontra ytinriktning

Många studenter har uppfattningen att matematikämnet enbart handlar om att räkna. En sådan uppfattning är ensidig men man kan inte utan vidare rubricera den som ytlig. En student som intresserar sig ivrigt för en matematisk utsagas geometriska innebörd men glömmer dess pedantiskt exakta utseende kan inte utan vidare betraktas som djupinriktad. Samspelet mellan matematikens idéinnehåll och dess formalism är ämnets stora tillgång och samtidigt en avsevärt problem i undervisningen. Den verkliga djupinriktningen i matematikämnet är att intressera sig för detta samspel.

3 Undervisning och examination

Ett bivillkor för projektet har varit att det skulle genomföras inom ramen för traditionella planeringsramar. Fördelen med en sådan restriktion är att experimentet därigenom blir generaliserbart till andra matematikkurs. Det är därför på sin plats att beskriva hur undervisningen mer i detalj brukar se ut.

Föreläsningarna

Nybörjarkurserna brukar gå på halvfart, med 2 dubbeltimmar föreläsningar i veckan och lika många lektioner, ofta organiserade i paket om två plus två timmar.

Föreläsningarna på nybörjarkurserna utgör således ungefär hälften av den undervisning studenten blir utsatt för. Publiken på en föreläsning kan på vissa kurser uppgå till nästan 200 studenter. Föreläsningarna är den mest välbesökta undervisningsformen. Många lärare förvånas över detta förhållande och försöker förklara det med att studenterna går till föreläsningarna för att höra examinatorn avslöja hur tentan ser ut. Det är en grov underskattning av våra studenter och av oss själva som föreläsare.

Många lärares pessimistiska inställning till föreläsningarna har förmodligen sin grund i det avsevärda tryck man upplever från den stora publiken. Det gäller naturligtvis att vara mycket väl förberedd. Dessutom måste man vara entusiastisk, ha bra talteknik och skriva stort, känna sina studenter så att man vet vad de kan och inte kan osv. Viktigast är att ha ett bra omdöme om vad som är ämnesmässigt viktigast och satsa på att få hem det.

Lektionerna

Lektionsgrupperna brukar i praktiken bestå av cirka 20 studenter. Flertalet lektionsledare är doktorander eller övningsassistenter. I regel har dessutom examinatorn en lektionsgrupp. Gruppindelningen görs av studierektor. Undervisningen består dels av problem-demonstration vid tavlan, ofta med aktivt deltagande från ett antal studenter i gruppen, dels av individuell handledning. Läraren går alltså runt och pratar med studenterna och besvarar eventuella frågor, med resten av gruppen löser övningsproblem.

Tentamensskrivningarna

Examinationen består huvudsakligen av en fem timmar lång tentamensskrivning omfattande ett antal problem och några teoretiska uppgifter. Standardskrivningen har ofta åtta

uppgifter om tre poäng vardera. Tolv poäng krävs för godkänt. De verkliga tentamensskrivningarna avviker i regel något från denna standard, men i huvudsak ser det ut på detta sätt. Utformingen av skrivningarna kommer att diskuteras i större detalj längre fram.

Övningsuppgifternas betydelse

Ett primärt syfte med kursböckernas övningsuppgifter är att öva färdighet i att handskas med textens begrepp och räknetekniker. De får därför ofta karaktären av mer eller mindre mekanisk tillämpning av räkne regler och formler. Ett andra syfte är att ge ytterligare exempel på tillämpningar av huvudresultaten i teorin. Det förekommer också enstaka uppgifter som avser att fördjupa förståelsen genom att sätta upp mer komplicerade situationer, belysa undantag eller möjliga generaliseringar.

En övningsuppgift har vanligen flera syften och det är ofta inte särskilt klart vad det primära syftet är. För studenten blir det mestadels fråga om att utan alltför mycket tankearbete harva igenom ett antal uppgifter, checka av att svaren stämmer och på så vis få en grov kontroll på att han är på rätt väg. De lite knepigare uppgifterna lär han sig snart att känna igen och förhålla sig till på ett sätt som passar honom.

Kursböckernas övningsuppgifter brukar sällan vara renodlade och omedelbart enkla. De är nästan alltid fullständigt formulerade. Svaren är entydiga och korrekta. Uppgifterna innehåller sällan problematiserande följdfrågor. De bästa läroböckernas uppgifter är ändå varierade och givande för många studenter. I bästa fall kan man lära sig åtskilligt genom att lösa ett antal av textbokens uppgifter.

Examinationens fördärliga inflytande

Det brukar sägas att studenterna bara läser för tentamen. Det är långt ifrån sant. De flesta läser så mycket som intresset för ämnet och studierna i allmänhet räcker till för. Tanken på tentamen dominerar inte studenternas vardagsarbete. Däremot påverkar det lärarna oerhört mycket. Vanligen undervisar läraren för tentamen. Det och det avsnittet brukar inte komma på tentamen, så läraren tar inte upp det. Denna typ av uppgift är vanlig så den behandlas omsorgsfullt. Det är klart att studenterna inte är dummare än att de förstår vinkar av detta slag. Detta avsnitt innehåller en mycket intressant generalisering, men vi har inte tid att behandla det, säger läraren. Studenten skriver "Kommer inte" i boken. Man kan faktiskt inte säga att någon av dem gör fel. Tvärtom, undervisningen skall syssla med kursens väsentligheter och det skall examinationen också. Därför är föreställningen om examinationens fördärliga inflytande en myt. Examinationen och undervisningen är intimt förbundna med varandra och skall vara så. Vill man påverka en kurs i någon riktning måste man ändra både examination och undervisning. Önskar man att studenterna skall reflektera över begreppens innebörd måste man ge tentamensuppgifter som testat detta och man måste ge övningsuppgifter som ger studenten en chans att förbereda sig på denna slags uppgifter. Examination och undervisning flyter därför samman. Examinationen blir en integrerad del av undervisningen. Övningsuppgifterna på en kurs spelar således en nyckelroll för att påverka studenternas lärande.

4 Varierade övningsuppgifter i matematik

I detta avsnitt gör jag ett försök att beskriva olika typer av övningsuppgifter. Min förhoppning är att texten skall fungera som inspiration för läsaren (och mig själv) att i framtiden variera utbudet av övningar. Texten har inte den klarhet och precision som jag från början hoppades på. Det är mer en samling av exempel. Jag har velat undvika definitionsproblem och precisa avgränsningar, eftersom jag insett att jag då skulle hamna i kunskapsteoretiska eller filosofiska problem som jag inte skulle behärska.

Olika typer av övningsproblem

Man kan urskilja flera typer av övningsuppgifter. Jag gör här ett försök till en grov indelning i fem kategorier, som naturligtvis inte är särskilt klart åtskilda. Som grund för uppdelningen använder jag övningsuppgifternas syfte och placering i kursen.

1. Introducerande övningar
Renodlat enkla övningar där studenten får arbeta med begrepp och formler i ett kortare textavsnitt.
2. Befästade övningar
Något svårare uppgifter som syftar till att konsolidera kunskapen och utvidga räknefärdigheten i ett avsnitt.
3. Utvidgande övningar
Övningar som generaliserar ett textavsnitts teori eller dess tillämpningar, belyser undantagsfall och behandlar mer komplicerade situationer.
4. Sammanfattande övningar
Någorlunda enkla övningar som sammanfattar teori och räknemetoder i en sekvens av textavsnitt.
5. Kursövergripande övningar
Övningar av varierande svårighetsgrad som kombinerar material från olika textavsnitt i kursen.

Vanligen tillhör kursböckernas övningar kategorierna 2, 3 eller 4. Uppgifter av den första och sista typen förekommer naturligtvis, men är rätt ovanliga.

I det följande gör jag ett försök att analysera vilka grundläggande syften man kan ha med uppgifter av ur de två första kategorierna. särskilt då den första typen. Vidare finns ett försök att beskriva uppgifter ur den fjärde kategorin. Exempelen som jag ger är fria bearbetningar (utan angivande av källa) av övningsuppgifter ur kursböcker och (mestadels) egna försök från kurserna i Envariabelanalys, Flervariabelanalys och Algebra. (Se referenslistan.)

Syften med introducerande och befästade övningar

Ett huvudsyfte med kursböckernas övningsuppgifter är naturligtvis att fästa studenternas uppmärksamhet på viktiga problemtyper som textens teori och metoder är avsedd att lösa. I kursen Envariabelanalys (exempelvis) är ett viktigt problem att finna maximum av en funktion av en variabel. Det är då självklart att man ger studenterna övningsproblem som handlar om just detta. Om man bortser från detta generella syfte kan en (renodlat) enkel övningsuppgift ha ett mer specialicerat mål. Jag har försökt att identifiera ett antal sådana under följande nio rubriker.

1. Att genomföra en enkel kalkyl
2. Att använda en given metod

3. Att observera ett viktigt förhållande
4. Att urskilja en viktig detalj
5. Att tolka vad som sägs
6. Att formulera om
7. Att dra korrekta slutsatser
8. Att analysera och utvärdera ett resultat

I det följande ges kommentarer och exempel för var och en av dessa rubriker.

1. Att genomföra en enkel kalkyl

Detta är det i särklass vanligaste syftet med kursböckernas övningsuppgifter. Det är rimligt och inte mycket att orda om.

Exempel:

1. Beräkna derivatan av funktionen $f(x) = \sin^2 3x$
2. Finn alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases}$$

3. Visa att funktionen $u(x, y) = x^2 - y^2$ är harmonisk.

2. Att använda en given metod

Även detta är ett vanligt syfte i kursböckerna. För det mesta hänvisar man explicit eller implicit till textens teori och exempel, men det kan också hända att metoden introduceras i uppgiften.

Exempel:

1. Använd andraderivata-testet för att undersöka om funktionen $f(x, y) = \cos x + \cos(x + y)$ har lokalt extremvärde i origo.
2. Använd determinant-teori för att visa att kolonnerna i matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

är linjärt oberoende.

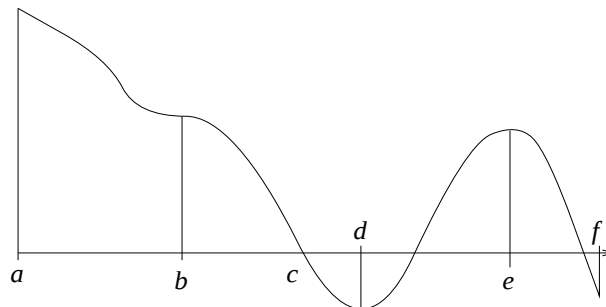
3. Låt P vara en given punkt som inte ligger på funktionsytan $z = f(x, y)$ och antag att Q är den punkt på ytan som ligger närmast P . I så fall kommer vektorn $\vec{PQ}$ vara vinkelrät mot ytan. Använd detta förhållande för att finna den punkt på ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger närmast $P = (3, 9, 10)$.

3. Att observera ett viktigt förhållande

För att sätta strålkastarljuset på ett viktigt förhållande kan det vara bra att rensa bort alla kalkyler i förhoppningen det viktiga blir synligare för studenten. Det skall då handla här om huvudpoänger i kursen, som till exempel linearitetens betydelse för lösningarna till ett linjärt ekvationssystem eller den exakta innebörden av principen "Om maximum inträffar i en inre punkt så är denna punkt stationär." I följande exempel krävs (nästan) inga kalkyler.

1. Låt A vara en 3×4 -matris, u och v vektorer i $\mathbb{R}^3$ och sätt $w = u + v$. Antag att de båda systemen $Ax = u$ och $Ax = v$ båda är lösbara. Vilken egenskap gör det möjligt för dig att dra slutsatsen att även systemet $Ax = w$ är lösbart?

2. Funktionen f har ingen stationär punkt i intervallet $[0, 1]$. Var inträffar maximum?
Ge ett exempel på en sådan funktion där maximum inträffar i punkten 0.
Ge ett exempel på en sådan funktion där maximum inträffar i punkten 1.
3. Följande kurva är graf av en deriverbar funktion på intervallet $I = [a, f]$. Vilka av punkterna $a, \dots, f$ är inre punkter i intervallet I ?
Vilka av dessa punkter är stationära punkter?
Var har funktionen sitt största värde?
Var har funktionen sitt minsta värde?



4. Betrakta talföljden $a_n = (4 + (-1)^n)/n$. Talföljden är positiv och går mot noll. Gäller det att a_n är avtagande?

4. Att urskilja en viktig detalj

Matematiken är fylld av viktiga detaljer som verkligen är fundamentala, men som i studenternas ögon lätt kan framstå som löjligen och småaktiga. Det gäller att hushålla hårt med övningsuppgifter som handlar om sådant. Det är klart att studenterna måste lära sig respekt för "elfte budet" : Du skall inte dividera med noll. Man behöver inte för den skull rigga upp små fällor av nolldivision. Visst kan man ge uppgiften

Bestäm en funktion vars derivata är e^{ax}

och sedan låta domedagsbasunen ljuda över svaret e^{ax}/a (vilket naturligtvis är fel om $a = 0$). Lite hyggligare är det att formulera uppgiften så här:

Bestäm en funktion vars derivata är e^{ax} om $a \neq 0$.

Vad blir resultatet om $a = 0$.

Följande två exempel handlar dels om den viktiga detaljen att även fullt rimliga funktioner kan sakna derivata i enskilda punkter, dels om det faktum att man i grundkurser i Linjär Algebra brukar reservera ordet invertebar för kvadratisk matriser.

1. Funktionen $f(x) = |x - 0.5|$, där $0 \leq x \leq 1$, har minsta värdet 0. Det antas i punkten $x = 0.5$. Detta är klart eller hur, eftersom $f(x) \geq 0$ för alla x , samtidigt som $f(0.5) = 0$.
Är 0.5 en inre punkt i intervallet $[0, 1]$? Är 0.5 en inre extrempunkt?
Varför kommer detta exempel inte i konflikt med principen att en deriverbar funktion måste vara stationär i en inre extrempunkt?

2. Betrakta matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna AB !

Varför är A inte invertebar?

(Poängen är att $AB = I$, vilket skulle medföra att A vore invertebar om A vore kvadratisk!)

5. Att tolka vad som sägs

Man tar lätt för givet att den matematiska formalismen och jargongen uppfattas på rätt sätt av studenterna. Jag vågar slå vad om att det en bra bit in på kursen i Flervariabelanalys finns studenter som inte känner sig säkra på vad som avses när man säger att punkten P ligger på funktionsytan $z = xy$. Här ett par förslag till uppgifter som huvudsakligen handlar om att rätt tolka vad som sägs.

1. Välj en punkt på funktionsytan $z = x^2(x + y + 1)$. Välj också en punkt som ligger ovanför ytan och en som ligger under ytan. Kan du välja de tre punkterna så att de ligger i rät linje?
2. Vad menas med att derivatan av en funktion är positiv på ett intervall ?
 - (a) Att derivatan inte är ≤ 0 i alla punkter i intervallet.
 - (b) Att derivatan inte är ≤ 0 i någon punkt i intervallet.
 - (c) Att derivatan är > 0 i alla punkter i intervallet.
 - (d) Att funktionen själv inte är avtagande på intervallet.
 - (e) Att funktionen själv är växande på intervallet.
3. Bestäm definitionsområdet för funktionen $x \mapsto 1/(x^2 - y^2)$
4. Låt A vara en 7×8 -matris. Vilka av följande rum är underrum av $\mathbb{R}^7$ och vilka är underrum av $\mathbb{R}^8$
 - (a) Kolonnrummet till A
 - (b) Radrummet till A
 - (c) Nollrummet till A
 - (d) Kolonnrummet till A^T
 - (e) Radrummet till A^T
 - (f) Nollrummet till A^T

6. Att formulera om

Ett givet problem måste ibland anpassas till den teori som finns tillgänglig. Sådana problem brukar erbjuda överaskande stora svårigheter, men det bör inte betyda att man skall undvika dem.

1. Finn avståndet från punkten $(1, 2, 3)$ till ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$
(Dels måste man sätta upp en formel för avståndet från den givna punkten till en varierande punkt på ytan. Dessutom bör man minimera kvadraten på avståndet.)
2. Finn dimensionerna av den billigaste möjliga låda med kvadratisk botten och utan lock, innehållande fyra kubikmeter.
3. Temperaturen i punkten (x, y) är $T + x^2 + 2y^2$. En myra befinner sig i punkten $(1, 2)$. I vilken riktning skall myran krypa för att kyla sig så snabbt som möjligt?
4. Betrakta den linjära avbildning T vars standardmatris är

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Finns det någon vektor som avbildas på sig själv?

7 . Att dra korrekta slutsatser

Renodlade uppgifter (utan kalkyler) där det gäller att dra rätt slutsats av vad som är givet.

1. Antag att a och b är hela tal och att $a/b = 26/82$. Vad kan då sägas om den största gemensamma delaren mellan a och b ?
2. Nollrummet till en 8×5 -matris är 2-dimensionellt. Vilken dimension har radrummet.
3. Vilka av följande utsagor är sanna och vilka är falska. Motivera! (V är ett ändligt-dimensionellt rum.)
 - (a) Om det finns en mängd med p element som spänner upp V så är $\dim V \leq p$
 - (b) Om det finns en linjärt oberoende mängd med p element som spänner upp V så är $\dim V \leq p$
 - (c) Om $\dim V = p$ så finns en uppspännande mängd med $p + 1$ element.
 - (d) Om $\dim V = p$ så är varje mängd med $p - 1$ element linjärt oberoende..

8. Att analysera och utvärdera ett resultat

1. Följande lösning hittades häromdagen i en papperskorg. Det framgick tyvärr inte vad problemet var.
Finn problemet! Lös det! Varför kastade man lösningen?

$$\begin{aligned} &\text{Eftersom } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ måste } 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sin x} \rightarrow 1^{\sin x} = 1 \end{aligned}$$

2. Sätt

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$$

Ett av följande numeriska värden är korrekt med en decimal. Vilket?

$$I = 1.4, I = 0.8, I = 0.2, I = -0.4$$

3. Genom att derivera funktionen $x \mapsto x^2 - 4x$ och finna andraderivatans nollställe kan man visa att funktionen har sitt minsta värde i punkten 2 och att detta minsta värde är -4 . Kan man komma fram till detta resultat utan att derivera? Hur?

4. Använd likheten

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

för att finna skalärer c och d så att

$$c(1, 3) + d(2, 4) = (5, 9)$$

5. Hur kan man utan kalkyler inse att 0 är ett egenvärde till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Sammanfattande övningar

Sammanfattande övningar kan naturligtvis ha samma utseende som introducerande övningar och bara skilja sig från dessa genom att behandla mer komplicerade situationer. Det är också naturligt att ge rutinuppgifter och typproblem som sammanfattande övningar. För att hitta mera innovativa övningar kan följande rubriker möjligen ge en viss hjälp.

- A. VÄRDERA OCH JÄMFÖRA
- B. VÄLJA OCH ORGANISERA
- C. BESKRIVA OCH DEFINIERA
- D. MOTIVERA OCH BEVISA
- E. KONSTRUERA OCH ILLUSTRERA
- F. DISKUTERA OCH SUMMERA
- G. GISSA OCH FÖRUTSE

A. VÄRDERA OCH JÄMFÖRA

Vanligen är övningsuppgifter fullständigt formulerade och har entydiga svar. Det är inget fel i det, men då och då kan man gott ställa studenterna inför oklara situationer eller uppgifter där studenten själv får avgöra om en utsaga är sanna eller falsk. Sådan uppgifter bör inte förses med svar. Att jämföra användningen av en term i olika kurser eller kursmoment kan också ge upphov till nyttiga insikter.

1. Följande utsagor handlar om mängder som antingen ligger i planet $\mathbb{R}^2$ eller på reella axeln. Somliga utsagor är meningsfulla, andra har ett odefinierat eller oklart innehåll medan andra åter är helt meningslösa. Diskutera utsagornas innebörd dels i planet, dels på reella axeln
 - (a) Mängden är begränsad.
 - (b) Mängden är begränsad uppåt.
 - (c) Mängden har minst en punkt.
 - (d) Mängden har en minsta punkt.
2. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska. Motivera eller exemplifiera. I alla tre fallen är A en symmetrisk 2×2 -matris och $x \in \mathbb{R}^2$
 - (a) $Ax = 0$ kan ha exakt två lösningar.
 - (b) $x^T Ax = 0$ kan ha exakt två lösningar.
 - (c) $x^T Ax = 1$ kan ha exakt två lösningar.
3. Betrakta följande utsaga.

Den kontinuerliga funktionen f antar sitt största värde i exakt två punkter men saknar lokalt minimum

Visa att

- utsagan är falsk för varje kontinuerlig funktion på reella axeln
- det finns kontinuerliga funktioner i planet för vilka utsagan är sann

B. VÄLJA OCH ORGANISERA

Det är viktigt att studenterna lär sig att hantera någorlunda komplicerade kalkyler. Sådant kräver att man kan organisera sina räkningar och att man reflekterar över vilka metoder som kan användas.

1. Visa att $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ på minst tre olika sätt .
2. Om man skall visa att en funktion av en variabel har ett lokalt minimum i origo kan man använda olika metoder, exempelvis
 - (a) studera derivatans teckenväxlingar nära origo,
 - (b) direkt uppskattning av funktionen nära origo,
 - (c) man visar att funktionen har sitt minsta värde i origo,

Pröva dessa metoder på följande tre funktioner

$$f(x) = x^2 - x^3, \quad g(x) = e^{|x|}, \quad h(x) = x \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Vilken metod föredrar du i de tre fallen?

3. Betrakta funktion $f(x) = 1/(x(x-1))$ där $x \neq 0, x \neq 1$. Beräkna $f'(x)$ på fyra olika sätt:
 - (a) Derivera f som en kvot.
 - (b) Skriv f som en produkt av $1/x$ och $1/(x-1)$ och derivera f som en produkt.
 - (c) Skriv f som en skillnad mellan $1/x$ och $1/(x-1)$ och derivera f som en skillnad.
 - (d) Sätt $z = f(x)$ och uttryck funktionssambandet som $z(x-1)x = 1$. Derivera båda leden implicit med avseende på x och lös sedan ut $z' = f'(x)$.

Vilken metod skulle du använda om det handlar om att avgöra i vilka intervall f är växande?

Vilken metod skulle du föredra om det gäller att fortsätta kalkylerna och beräkna den n -te derivatan av f ?

4. Bestäm det största värdet av $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy$ på mängden $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Föreslå några olika metoder.
5. Skriv upp en inverterbar 3×3 -matris bestående av 9 olika hela tal och beräkna dess invers.

C. BESKRIVA OCH DEFINIERA

Många studenter har svårt att göra skillnad mellan den matematiska definitionens eller satsens exakta formulering och de olika metoder som står till buds för att verifiera definitionens eller satsens villkor.

1. Vad är definitionen av att en funktion är strängt växande på ett intervall. Beskriv en metod att visa att en funktion är strängt växande på ett intervall.
2. Definiera först vad som menas med att $\{v_1, \dots, v_p\}$ av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. Beskriv sedan en metod att avgöra om givna vektorer är linjärt oberoende. Ge ett exempel med tre vektorer. Beskriv slutligen den geometriska innebörden av att tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende.

3. Låt f vara en reellvärd funktion av två variabler.
 Hur definieras gradienten för f i punkten (a, b) ?
 Vilken geometrisk betydelse har gradienten?
 Hur kan man använda gradienten för att beräkna tangenten till en nivåkurva?
 Rita en figur för att illustrera situationen och ge också ett lagom enkelt exempel.

D. MOTIVERA OCH BEVISA

Bevisuppgifter kan utformas på många sätt. Ett sätt är förstås att rakt av be studenten att bevisa en viss utsaga. En variation på temat är att fråga efter hur mycket som krävs för att en viss slutsats skall vara sann (s.k. nog-uppgifter). En annan variation är sant-falsk-uppgifter.

1. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska. Bevisa de sanna utsagorna och motbevisa de falska till exempel genom att ge ett motexempel.
 - (a) Om ingen av vektorerna i mängden $M = \{v_1, v_2, v_3\}$ är en multipel av någon av de andra så är M linjärt oberoende.
 - (b) Om v_1, v_2, v_3 alla är skilda från noll-vektorn och v_2 inte är en multipel av v_1 och om v_3 inte är en linjärkombination av v_1 och v_2 , så är $\{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt oberoende.
2. En funktion har kontinuerliga partiella derivator i planet. Här följer en lista på egenskaper. Vilka av dessa är tillsammans tillräckliga för att garantera att funktionen har ett minsta värde och att det antas i origo?
 - (a) gradienten är noll i origo
 - (b) gradienten är aldrig noll utanför origo
 - (c) funktionen är större än 10 utanför enhetscirkeln
 - (d) funktionen är mindre än 1 innanför enhetscirkeln
 - (e) funktionen har värdet 0 i origo
 - (f) funktionen har lokalt minimum i origo
3. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}^2$ och P en punkt som inte ligger på funktionsytan till f . Motivera varför det måste finnas en punkt på funktionsytan som ligger närmast P .
4. Antag att U och V är ortogonala matriser av samma storlek. Förklara varför UV och UV^T också är ortogonala.

E. KONSTRUERA OCH ILLUSTRERA

Uppgifter där studenten får konstruera egna exempel är förstås svårkontrollerade. Inga svar kan ges. Ändå borde man nog ge den sortens uppgifter lite då och då. Det kan handla om att illustrera en given metod med ett eget exempel, att ge exempel "från figur till formel", "från formel till figur", "från ord till formel" osv.

1. Skriv upp ett explicit funktionsuttryck som definierar en kontinuerlig funktion på reella axeln med värdemängden $[1, 2]$.
2. Konstruera en diagonaliserbar 2×2 -matris A med båda elementen i första raden $\neq 0$, med ett egenvärde noll och ett negativt egenvärde.

3. Välj ett andragradspolynom i två variabler och en tillhörande nivåkurva, som inte passerar genom origo. Kan du finna någon punkt på nivåkurvan där tangenten är parallell med x -axeln?
4. I denna uppgift handlar det om att rita grafen av en kontinuerlig funktion utan att explicit ge en formel för funktionsvärdena. Rita grafen om f har lokalt maximum i punkten 1, lokalt minimum i 0, och $f(0) = f(1) = 1$.
5. I det följande är f en kontinuerligt deriverbar funktion i planet. Ge exempel i form av explicita funktionsuttryck på följande två situationer
 - (a) f har lokalt minimum i origo och saknar andra stationära punkter
 - (b) f är begränsad men saknar stationära punkter
6. En linje kan som bekant beskrivas som snitt mellan två icke-parallella plan. Antag att en linje är given på detta sätt. Beskriv ett par metoder att finna linjens rikt-ningsvektor och linjens ekvation i parameterform. Illustrera med ett eget exempel.

F. DISKUTERA OCH SUMMERA

Studenten kan inbjudas till övergripande (gärna rent verbala) diskussioner om metoder eller samband.

1. Vad behöver man veta om en funktion av en variabel för att man skall vara säker på att den har ett nollställe i ett givet intervall? Förklara i ord och testa på funktionen $f(x) = e^{2x} - x^2$ och några olika intervall.
2. Beskriv i ord några olika metoder att visa att kolonnerna i en kvadratisk matris är linjärt oberoende. Illustrera metoderna på en 3×3 -matris med nio olika element.
3. Varför är det omöjligt att konstruera en kontinuerlig och obegränsad funktion på mängden $U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Hur blir situationen om man tar bort en punkt från U . Beskriv i ord innehållet i de satser du refererar till.

G. GISSA OCH FÖRUTSE

Många studenter som ställs inför ett problem sätter direkt igång med att räkna utan att försöka förutse vad som kommer att hända. Kanske kan man motverka denna ovana genom att formulera problem där det enbart gäller att förutse vad som kommer att bli resultatet av en viss kalkyl. Att ställa upp hypoteser och sedan bevisa dem kan också vara stimulerande, fast det är nog ganska svårt för många.

1. Tänk efter, utan att derivera, om andraderivata-testet kan fungera i origo för funktionen $f(x) = x^3 e^{-x}$.
2. Skriv upp ett par diagonalmatriser av samma storlek och undersök om de kommuterar med varandra. Ställ upp en generell hypotes och försök bevisa den.
3. Måste produkten av två triangulära matriser alltid vara en triangulär matris? Svaret är nej, men med lämplig modifikation av påståendet blir svaret ja.
4. Rita några funktionskurvor $y = f(x)$ där f är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ och $f(0) = f(1) = 0$. Vad är relationen mellan antalet lokala maxima och antalet lokala minima. Ställ upp en generell hypotes och bevisa den.

5 Tentamensuppgifter

Olika strategier för att göra tentamensskrivningar

Examinationen på de stora grundkurserna i matematik består som tidigare nämnts av en tentamensskrivning om fem timmar. En halv termins arbete skall utvärderas under dessa få timmar. Ett omfattande kursmaterial skall kontrolleras. Detta är naturligtvis mycket svårt eller omöjligt.

Låt mig först diskutera möjligheten att kontrollera att studenterna har lärt sig hela kursen. För konkretionens skull tänker jag mig att kursen består av åtta någorlunda avgränsade moment och att tentamensskrivningen omfattar 24 poäng, alltså i medeltal tre poäng per kursavsnitt.

Den traditionella uppläggningsen av tentamensskrivningarna är att varje kursmoment företräds av en uppgift om (i princip) tre poäng. För godkänt krävs kanske tolv poäng. Det betyder att studenten kan bli godkänd om han behärskar ungefär halva kursen väl. Detta är en sanning med viss modifikation eftersom det ibland förekommer integrerade uppgifter som kräver flera olika kursmoment. Dessutom är vissa uppgifter mera krävande och förutsätter en något mogen kunskap om hela kursen.

För att undvika att studenterna kan klara sig på drygt halva kursen kan man dela upp tentamensuppgifterna i grupper svarande mot de olika kursmomenten och kräva en viss minimipoäng inom varje grupp. På så vis kan man hindra att någon blir godkänd utan att ha bekantat sig med kursens alla delar. Varje kursmoment kan emellertid bara täckas med ett fåtal poäng och man kan inte kräva att varje delfråga har besvarats helt korrekt. Kunskapskontrollen på varje moment blir därför med nödvändighet ytlig och det blir svårt att ge mer krävande uppgifter.

En annan möjlighet är att med slumpens hjälp bestämma (inom vissa ramar) vilka kursmoment som skall förekomma på skrivningen. Genom att inte lämna någon garanti för att varje kursmoment förekommer på varje skrivning påverkar man studenterna att förbereda sig för mer än hälften av kursen. Säg att bara fem kursmoment finns med på en tenta. Då måste studenten ha förberett sig för minst sju moment om han vill vara säker på att klara sig. Denna metod medger dessutom att man ges svårare uppgifter, men den kräver att examinatorn verkligen lyckas övertyga sina studenter om att tentorna kan variera starkt i sin utformning.

Faran och nödvändigheten av typuppgifter

Studerar man givna tentamensskrivningar på en viss kurs så finner man att skrivningarna regelbundet innehåller ett ganska litet antal typuppgifter. Detta ligger faktiskt i sakens natur. Kursen handlar om vissa centrala problem och det är rimligt att dessa förekommer ofta på tentorna. Det finns förstås en fara i detta. Om typuppgifterna blir alltför standardiserade och förutsebara leder det till att studenterna kan få ihop en hel del poäng på att bara lära sig ett litet antal typuppgifter. Det reducerar det minimala kursomfång som behövs för att vara rimligt säker på att klara tentan. Dessutom är det brukligt att man vid rättningen av tentorna ger enstaka poäng för rätt ansats eller en god början eller liknande. Typproblemen är därför farliga för nivån på examinationen. Man bör därför vara angelägen om att variera utformningen av typuppgifterna och att se till att utbudet av typproblem inte blir för snävt. Slumpen kan här hjälpa till. En förhoppning är att de olika förslag till övningsuppgifter som givits tidigare skall kunna användas för att variera även typuppgifternas utformning. Det gäller särskilt de s.k. sammanfattande övningarna. Det är emellertid klart att friheten att utforma tentamensuppgifter är mer begränsad än för övningsuppgifter.

Skall man kräva bevis

På tentamensskrivningarna förekommer det ofta en eller ett par bevisuppgifter. Ända upp till nio poäng kan avdelas åt sådana uppgifter. Många studenter lägger därför ner mycken möda på att lära sig bevis ur kursboken och en del av dem lär sig till och med (vissa) bevis utantill (som det heter). Att lära sig bevis utantill är förkastligt, brukar vi lärare framhålla, i samma andetag som vi delar ut prydliga listor över vilka bevis som kan förekomma på tentorna. Den ambivalens som vi därmed avslöjar är faktiskt ganska naturlig. Det är rimligt att kräva bevis, eftersom bevis är en viktig ingrediens i matematikämnet. Att avstå från att kräva bevis skulle vara att säga att våra nybörjare är för omogna för att begripa dem, vilket vore felaktigt och oförskämt. Att avstå från att kräva bevis skulle dessutom bara innebära att man sköt ett problem framför sig. Däremot bör man naturligtvis vara medveten om att de flesta nybörjare aldrig sett bevis förut i sina studier och kanske inte heller inser behovet av sådana. Det är därför rimligt att hushålla med bevisen på tentan både vad det gäller antal och komplikationsgrad.

Att göra varierade tentamensskrivningar

Med tanke på alla de olika mål som finns med en kurs kan det vara svårt att åstadkomma en tillräcklig variation mellan olika tentamensskrivningar. Ett eller två verkligt relevanta typproblem bör finnas med, men man kan använda slumpen för att välja ut vilka. Ett par teoretiska uppgifter, till exempel bevis, bör finnas likaså efter beslut av fru Fortuna. Någon svårare uppgift bör också finnas på tentan för att ge ett tillräckligt svårighetslyft. Tar man därutöver med ett par uppgifter av den typ som jag har diskuterat ovan har man antagligen nått så långt man kan i variation inom den ram som en femtimmars skriftlig examination tillåter.

För egen del har jag de senaste åren gått tillväga på följande sätt. Jag tillverkar en problembank bestående av ett tjugotal enklare uppgifter. En del är typuppgifter på kursens olika avsnitt, en del är uppgifter av den typ som beskrivits ovan. Jag gör också en liten bank av svårare problem. Sedan lottar jag ut de problem jag har gjort på de (låt oss säga) tre skrivningar som jag skall göra på kursen. Jag kompletterar sedan skrivningarna med lämpligt varierade bevis- och teoriuppgifter. När de tre skrivningarna efter en del putsande känns färdiga använder jag slumpen för att bestämma i vilken ordning jag skall ge dem. Denna metod har flera fördelar, bland annat att allt arbete med sammansättning av skrivningar görs medan kursen är aktuell. Vidare har metoden fördelen att man knappt själv kommer ihåg hur den första skrivningen ser ut.

Vad kontrollerar man egentligen med en tentamensuppgift

Låt oss titta på ett par exempel på tentamensuppgifter. Tag följande teoretiska deluppgift om (säg) ett poäng.

Definiera vad som menas med en symmetrisk matris

Det är ingen tvekan om att frågan är relevant för en standardkurs i Linjär Algebra, även om ett poäng kanske är i generösaste laget. vad skall man då säga om följande fullständigt korrekta svar:

En kvadratisk matris är symmetrisk om $A^T = A$

Den student som svarar så måste få sin poäng och den är sannolikt välförtjänt. Men vet han säkert vad en symmetrisk matris är? Det kan man faktiskt inte veta. Han kanske varken vet vad en kvadratisk matris är eller vad A^T betyder. Han kanske bara är en minneskonstnär som har reproducerat bokens definition. Den student som svarar

En matris är symmetrisk om raderna och kolonnerna är lika

får naturligtvis inte något poäng, men han har kanske begripit vad en symmetrisk matris är fast han uttrycker sig som en kråka.

Låt oss testa en annan fråga om symmetriska matriser.

Ge ett exempel på en symmetrisk matris

Här ett tänkbart och helt korrekt svar:

Enhetsmatrisen är en symmetrisk matris

Tyvärr är enhetsmatrisen exempel på en massa typer av matriser (diagonala, triangulära, inverterbara, ortogonala) så man kan inte veta vad svaret egentligen är värt. Ett nytt försök:

Ge ett exempel på en symmetrisk matris med minst etthundrasjutton olika element

Sannolikheten för att en student som inte vet vad en symmetrisk matris är skall råka skriva upp en matris som möter denna specifikation är ganska liten. Men ett misslyckande behöver å andra sidan inte bero på okunskap om vad en symmetrisk matris är. Det kan istället bero på att man inte insett att matrisen måste ha minst femton rader och kolonner för att den skall kunna vara symmetrisk och ha minst etthundrasjutton olika element. Följande mellanläge är kanske lagom:

Ge ett exempel på en symmetrisk 3×3 -matris med sex olika element

Sannolikheten är i varje fall inte stor för att en okunnig student skall kunna ge ett sådant exempel. Detta kan se ut som ett gott argument för att denna senare fråga skulle vara det bästa sättet att kontrollera om en student vet vad en symmetrisk matris är. Tyvärr stämmer det nog inte. Man vill nämligen att studenterna verkligen skall veta hur definitionen ser ut och vad den innebär. Det är en viktig del av varje matematikkurs att skilja mellan den generella definitionen och enstaka exempel (som ju alla har sina särmärken) eller den speciella metoden som kan användas för att verifiera definitionens villkor. Man borde därför helst ställa en kombinerad fråga som:

Definiera vad som menas med en symmetrisk matris.

Ge också ett exempel på en symmetrisk 3×3 -matris med sex olika element.

Men väljer man att fråga så bör man i konsekvens med den lilla analys som gjordes ovan inte ge några delpoäng om definitionen är rätt men exemplet är fel (eller tvärtom).

Låt mig nu ta ett andra exempel. Säg att vi vill undersöka om studenten har begripit hur man kan finna tangenten till en nivåkurva i en given punkt. Man kan då hitta på följande rätt typiska tentamensuppgift:

Betrakta kurvan $x^3 + 3xy^2 + 3y^5 + \arctan(x - 2y) = 17$.

Bestäm riktningen för tangenten i punkten $(2, 1)$.

Ställd inför detta problem får studenten först försöka påminna sig vad som skall göras. En gradient skall beräknas, vilket betyder att den där hiskeliga funktionen skall deriveras och derivatorna evalueras i den där punkten. Dessa kalkyler levererar eventuellt gradienten $\nabla = (16, 25)$. Sedan vet studenten att tangenten är parallell med $v = (25, -16)$.

Många studenter klarar en sådan uppgift eftersom de har sett ett antal uppgifter av denna typ. En viss räknefärdighet behövs för att få derivatorna rätt och på en så här pass standardiserad uppgift bör räknefel ge kännbara poängavdrag. Kanske vet de flesta varför man bestämmer tangentriktningen som man gör, men svaret har karaktären av recept. Man behöver inte förstå vad en nivåkurva är. Man behöver inte veta att gradienten är normal till kurvan. Det räcker att ha sett denna typ av uppgift förut och på ett eller annat sätt lärt sig hur man går till väga. Det är kanske inte så väldigt mycket fel i detta, men det finns nog skäl att försöka variera konfekten då och då. Här ett försök:

Betrakta funktionen $f(x, y) = x^2 + y^3$.

Välj en nivåkurva till f så att nivåkurvan inte passerar genom origo.

Välj också en riktning (u, v) där $u \neq 0$ och $v \neq 0$

och en punkt P på nivåkurvan, så att tangenten i P är parallell med (u, v) .

Här kan studenten inte på samma sätt lita till recept. Den student som lutar sig tillbaka och tänker efter vad uppgiften handlar om finner snart en bekväm lösning. Den som kastar sig över uppgiften utan att reflektera kan lätt hamna i svårigheter.

Jag återkommer till just denna uppgift i beskrivningen av projektets två praktiska försök.

Exempel på tentamensuppgifter

Här följer ett litet antal exempel på tentamensuppgifter som jag har givit på kurserna i Linjär Algebra och Flervariabelanalys, del 1.

1. Antag att funktionen $(x, y) \mapsto f(x, y)$ är definierad på mängden D .
Om f har lokalt extremvärde i punkten $(a, b) \in D$, så gäller som bekant precis ett av tre alternativ. Två av dem är

- (a) (a, b) är en randpunkt till D ,
- (b) (a, b) är en inre stationär punkt.

Redogör först för vilket det tredje alternativet är och förklara vad det innebär. Ge sedan ett exempel på en funktion f som har lokalt extremvärde i en punkt där det tredje alternativet gäller. Bevisa slutligen satsen!

2. Denna uppgift handlar om punktföljder i planet och delföljder till sådana följder. Det gäller att ge exempel på situationer som kan förekomma. Välj enkla exempel, men lägg ner arbete på att motivera varför exemplen fungerar.

- (a) Ge ett exempel på en punktföljd i planet vars alla delföljder är divergenta.
- (b) Ge ett exempel på en begränsad mängd i planet och en följd av punkter i denna mängd, sådan att ingen delföljd konvergerar mot en punkt i mängden.

3. Låt E vara enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i $\mathbb{R}^2$ och låt E_0 vara enhetscirkeln med punkten $(1, 0)$ borttagen. Avgör om det finns funktioner f i följande tre fall.

- (a) f är kontinuerlig på E och $f(E) = E_0$
- (b) f är kontinuerlig på E_0 och $f(E_0) = E$
- (c) f är kontinuerlig på E , $f(E_0) = E_0$ och $f(E) = E$

Om en sådan funktion existerar, ange en. Motivera i annat fall varför en sådan funktion inte kan existera.

4. Låt A och B vara två mängder i $\mathbb{R}^n$.

- (a) Vilka (om några) inklusioner gäller mellan mängderna $\partial(A \cup B)$ och $(\partial A) \cup (\partial B)$
- (b) Samma fråga om mängderna $\text{Int}(A \cup B)$ och $(\text{Int} A) \cup (\text{Int} B)$.

Bevisa de sanna inklusionerna och ge motexempel mot de falska.

(∂M betecknar randen av M medan $\text{Int} M$ betecknar det inre av M)

5. Redogör först för definitionen av att en reellvärd funktion av två variabler är differentierbar i origo.

Ge sedan exempel på kontinuerliga funktioner f och g med

$$\nabla f(0, 0) = \nabla g(0, 0) = (1, 1)$$

sådan att f är differentierbar i origo, medan g inte är differentierbar i origo. Motivera i båda fallen.

6. Ta ställning till följande utsagor och bedöm om de är sanna eller falska. Bevisa de sanna utsagorna och motbevisa de falska genom att ge motexempel.

- (a) Snittet av en öppen mängd och en kompakt mängd är alltid öppen.
- (b) Unionen av en sluten mängd och en kompakt mängd är alltid sluten.
- (c) Unionen av en sluten mängd och en kompakt mängd är alltid kompakt.
- (d) Snittet av en sluten mängd och en kompakt mängd är alltid kompakt.

7. Låt A vara en $m \times n$ -matris (med m och n olika). Vilka av följande linjära rum är underrum av $\mathbb{R}^n$ och vilka är underrum av $\mathbb{R}^m$. Vilka av de uppräknade rummen är alltid lika? Motivera dina svar!

$$\begin{array}{ccc} \text{Col}A & \text{Nul}A & \text{Row}A \\ \text{Col}A^T & \text{Nul}A^T & \text{Row}A^T \\ (\text{Col}A)^\perp & (\text{Nul}A)^\perp & (\text{Row}A)^\perp \end{array}$$

8. Konstruera en symmetrisk och inverterbar 3×3 -matris M med hjälp av talen 0, 1 (inga andra). Matrisen skall ha enbart ettor i diagonalen och högst tre nollor. Bestäm sedan egenvärdena till M .
9. Konstruera om möjligt matriser A_1, A_2, A_3 i följande fall. Motivera varför de konstruerade matriserna har de angivna egenskaperna eller förklara varför konstruktionen inte är möjlig.
- (a) $A_1x = b$ har mer än en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och A_1 har fyra linjärt oberoende kolonner.
 - (b) $A_2x = b$ har precis en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och A_2 har tre linjärt oberoende kolonner.
 - (c) $A_3x = b$ har mer än en lösning för något $b \in \mathbb{R}^4$ och A_3 har fem linjärt oberoende kolonner.
10. Konstruera en 4×3 -matris A med rangen 2 sådan att varje vektor y i kolonnrummet har förstakoordinaten $y_1 = 0$. Bestäm också nollrummet för den valda matrisen. (Välj enkla siffror!)
11. Välj själv ett tvådimensionellt underrum H av $\mathbb{R}^4$ sådant att vektorn $(1, 2, 3, 4)$ ligger i H . Bestäm sedan standardmatrisen för den ortogonala projektionen på H .
12. Besvara följande frågor.
- (a) Om A är en 7×10 -matris, vilken är då det minsta möjliga värdet på $\dim(\text{Nul}A)$?
 - (b) Om A är en 7×10 -matris, vilken är då det största möjliga värdet på dimensionen av radrummet?
 - (c) Om nollrummet till A har dimensionen 4 och kolonnrummet har dimensionen 5, vilket är då det minsta antalet kolonner som A kan ha?

Motivera svaren !

6 Två praktiska försök

Projektet har genomförts på två kurser, Flervariabelanalys, del 1, vårterminerna 1994 och 1995 och Algebra, del 1 (Linjär Algebra) under höstterminen 1994. Ett stort antal övningar har fabricerats och prövats i undervisningen. Dessutom har tentamensskrivningar utformats på det sätt som beskrivits ovan. Utvärderingen av försöken har i huvudsak skett genom examinationen och personligt färgade iakttagelser. Vi har också haft kursvärderingar där studenterna fått tillfälle att exempelvis kommentera övningsuppgifterna, men svarsfrekvensen har inte varit hög och svaren ganska intetsägande. Det allmänna intrycket är att studenterna reagerat positivt på försöken eller att de i vart fall förstått poängen med uppgifter och tentamensskrivningar.

Mitt personliga intryck är att studenterna ändrat sitt sätt att läsa som en följd av de förståelseinriktade övningsuppgifterna. Grunden för detta intryck är resultaten i examinationen. Jag har tidigare gjort enstaka försök att på skrivningarna ge någon uppgift av den typ jag nu har försökt odla mera systematiskt. Resultaten på dessa enstaka uppgifter har i de flesta fall varit mycket nedslående, vilket troligen berott på att studenterna aldrig ställts inför uppgifter av det slaget. På projektets kurser har dessa uppgifter gått mycket bättre, vilket rimligen måste bero på att studenterna anpassat sina studier till de förändrade kraven. Jag tycker mig också se en tendens att studenterna är mera måna om att förklara sammanhang. Man nöjer sig i många fall inte med att enbart redovisa kalkyler.

Det finns emellertid ingen entydig tendens som gäller alla studenter. Man kan mycket tydligt se att vissa studenter inte alls tagit intryck av de förståelseinriktade uppgifterna. Dessa studenter har räknat på som vanligt och lärt sig bevis och räknemetoder utan särdeles mycket eftertanke. Många av dem har säkert klarat tentorna ändå, men en del har förmodligen fallit igenom. Å andra sidan finns det också studenter som blivit gynnade av förändrade stilen på examinationen. Den student som vant sig vid att tänka till innan han sätter igång att räkna har kunnat vinna mycket tid på vissa av tentamensuppgifterna. Samtidigt är det värt att understyrka att examinationen inte skiljer sig radikalt från tidigare år. Det är fortfarande fråga om en femtimmars skrivning med ungefär åtta uppgifter varav bara några avvikit från det vanliga. Den stora skillnaden ligger förmodligen i att skrivningarnas utseende har varierat mer än tidigare och att de därmed varit svårare att förutse.

Kursen Flervariabelanalys, del 1

Kursen har givits under veckorna 3 - 12, VT 94 och VT 95, med sammanlagt 17 dubbeltimmar föreläsningar, varav tre eller fyra i form av demonstration av problemlösning för föreläsningsgruppen och 16 dubbeltimmar lektioner för fem lektionsgrupper. Antalet studerande som anmält sig till första delprovet var 118 (VT 94) och xyz (VT 95). Antalet studenter som arbetat regelbundet med kursens bonusgivande inlämningsuppgifter var 111 (VT 94) och xyz (VT 95).

Kurslitteraturen var densamma båda terminerna, nämligen

- A Adams : Calculus, a complete course, kap. 12-14
Addison-Wesley, 1991
- GLO Gustavsson, Löfström, Olsson :
Några grundläggande begrepp i matematisk analys, kap. 1.
Kompendium , 1994
- L Löfström: Ordinära differentialekvationer, kap. 3-4.
Kompendium, aug. 1993

Sammanlagt har drygt 70 övningsuppgifter (varav 5 s.k. inlämningsuppgifter) samt ett antal tentamensskrivningar delats ut. Av de utdelade övningsuppgifterna var flertalet

mer eller mindre tydliga exempel på de typer av uppgifter som har diskuterats ovan.

Resultaten på det första delprovet såg ut så här :

VT 94 :

Antal underkända : 36 = 35 %

Antal godkända : 67 = 65 %

Därav med över 19 poäng (VG) : 25 = 25 %

Antalet deltagande studerande var 103.

VT 95 :

Antal underkända : 37 = 40%

Antal godkända : 56 = 60%

Därav med över 19 poäng (VG) : 24 = 26%

Antalet deltagande studerande var 93.

Anm. : Den lägre genomströmningen VT 95 är troligen orsakad av att omtentamen låg ganska nära det första provtillfället. Vissa studenter sparade sig till omprovet. Den verkliga genomströmningen VT 95 låg på ungefär samma nivå som VT 94.

Begreppet signifikansgrad

På en tentamensskrivning fungerar vissa uppgifter som "transportsträckor", medan andra uppgifter fungerar som sorteringsuppgifter. Enskilda uppgifters funktion kan analyseras med hjälp av begreppet **signifikansgrad**, ett begrepp som vi härmed introducerar.

Signifikansgraden för en tentamensuppgift definieras som sannolikheten för att resultatet på uppgiften och resultatet på hela skrivningen överensstämmer. Man måste då precisera vad som avses med resultat. Det finns två naturliga nivåer. Den ena är nivån godkänd/icke godkänd, den andra är väl godkänd/icke väl godkänd. På en enskild uppgift kan det vara rimligt att anse att gränsen för godkänd går vi högst en missad poäng (av tre eller fyra), medan väl godkänd skall betyda full pott på uppgiften. På hela skrivningen är gränsen för godkänd 13 poäng och gränsen för väl godkänd kan gå vid 19 poäng (inklusive bonus).

Att signifikansgraden för godkänt på en uppgift är 80% betyder alltså att resultatet vad gäller godkänt/underkänt på denna uppgift i 80 fall av 100 överensstämmer med motsvarande resultat på hela skrivningen.

Följande tabell beskriver max-poäng, medelpoäng, signifikansgrad för godkänt och signifikansgraden för väl godkänt på marsskrivningen 1994 :

Problem	maxpoäng	medelpoäng	signifikansgrad G %	signifikansgrad VG %
1	4.0	2.2	70	85
2	3.0	1.2	70	85
3	3.0	2.5	75	40
4	3.0	1.9	70	75
5	3.0	1.7	80	80
6	3.0	1.7	80	70
7	3.0	0.8	60	85
8	3.0	0.3	50	80

Eftersom antalet godkända var 65 % är en signifikansgrad för godkänd på 70 % inte särskilt imponerande. De uppgifter som har en övertygande signifikans för godkänt är därför främst uppgifterna 5 och 6. Dessa uppgifter hade alltså bäst förmåga att skilja godkända från underkända. Däremot var de relativt dåliga på att skilja ut vilka som fick väl godkänt

på kursen.

Uppgiften 6 såg ut så här :

Sätt $f(x, y) = x^2 + y^3$. Välj först en nivåkurva till f , som inte går genom origo.

Välj sedan två tal $u \neq 0$ och $v \neq 0$ samt en punkt P på nivåkurvan, så att tangenten i P är parallell med vektorn (u, v) .

Du får välja siffervärden på u och v och koordinaterna för punkten P hur du vill, bara tangenten i P har den beskrivna egenskapen. Glöm inte att motivera!

Denna uppgift är i all sin banalitet således en av de enskilda uppgifter som bäst skiljer godkända från underkända, detta trots att medelpoängen på uppgiften var så låg som 1.7.

Sammanfattande värdering: Flervariabelanalys

Under de fyra år som jag har ansvarat för kursen Flervariabelanalys har kursen stegvis ändrat karaktär genom introduktionen av nya typer av övningsuppgifter och tentamensproble. Första gångerna jag hade kursen provade jag enstaka tentamensproblem typen "Ta ställning till följande utsagor. Avgör vilka som är sanna och vilka som är falska." eller "För vilka parametervärden gäller" . Studenterna hade då endast sett enstaka uppgifter av denna typ. Resultaten på dessa uppgifter blev mycket nedslående. När jag nu ger uppgifter av en sort som studenterna inte sett förut, blir resultaten inte alls lika dåliga. Detta kan naturligtvis bero på att studenterna har blivit bättre alldeles oberoende av undervisning och övningsuppgifter. Jag föredrar emellertid att tolka förändringen som ett resultat av att studenterna ändrat sin studiemetodik. Det är rimligt att tro att om studenterna för klart för sig att det inte enbart gäller att räkna mekaniskt utan att syftet är att förstå samband och begrepp, så kommer ett antal av dem att påverkas i sin inlärning så att de bättre klarar sådana förståelseinriktade uppgifter.

Det är en svår konst att framställa en lösning på ett klart och läsbart sätt. Ett matematiskt resonemang består av en blandning av ord och formler och det är mycket svårt att finna en njutbar balans mellan dessa två ingredienser. För mycket formler och lösning ser ut som ett obegripligt krypto. För mycket ord och de enkla sammanhangen blir otydliga. Studenternas skrivelser har på senare år blivit bättre i sin språkliga form. Skrivningarna speglar ofta en klar önskan att förklara sammanhang och kalkyler. Det har blivit mindre vanligt med lösningar som enbart består av fragmentariska kalkyler. Återigen kan detta ha med andra förändringar att göra än de som är relaterade till detta projekt, men det är möjligt att det finns ett samband.

Kursen Algebra, del 1 (Linjär Algebra)

Litteratur

David C. Lay : Linear Algebra and its applications. Addison-Wesley, 1993.

Boken användes för första gången. Valet av bok dikterades i första rummet av den utmärkta texten, men också av bokens innovativa övningsuppgifter. Flertalet av bokens övningar hade karaktären av introducerande övningar. De krävde nästan aldrig någon räknefärdighet. De var däremot mycket skickligt varierade och insiktsfullt tillrättalagda.

Kurslitteraturen kompletterades med 53 blandade övningar (varav 5 inlämningsuppgifter). Eftersom tidigare års tentamensskrivningarna baserades på en annan litteratur och inte var tillräckligt varierade utarbetades tre s.k. fingerade tentamensskrivningar omfattande sammanlagt 24 problem. På grund av karaktären hos kursbokens övningar var

en del av de utdelade blandade övningarna av en mer traditionellt räknemässig karaktär medan huvuddelen hade karaktären av sammanfattande övningar.

Första provet på kursen ägde rum i januari 1995. Antalet deltagande studerande var 131. Så här blev utfallet :

Antal underkända : 43 = 32.8 %

Antal godkända : 88 = 67.1 %

Antal med minst 19 poäng : 41 = 31.3 %

Kursen i Linjär Algebra är en notorisk problemkurs. Genomströmningen är ibland dålig, ofta sämre än denna gång och sällan bättre. Studenterna anser att kursen är rörig och bitvis obegriplig. Grundproblemet torde vara att kursomfånget är för stort och detta har inte botats med den nya boken och höstens experiment. En stort antal studenter (15 %) hade högst ett poäng över gränsen för godkänt. Många av dessa studenter är naturligtvis ganska missnöjda med kursen.

Bokens övningsuppgifter var som sagt extremt enkla. Den uppfattningen delas av många studenter. De utdelade blandade övningarna fick inte heller det genomslag som de borde fått. Detta ledde till att studenternas räkneförmåga var dålig på skrivningen.

Sammanfattande värdering: Linjär Algebra

Jag vill vara försiktig med att värdera projektets resultat på kursen i Linjär Algebra eftersom vi har provat en ny kurslitteratur och de projektets övningsuppgifter inte har provats förut. En annan svårighet är att kursen alltid varit en problemkurs bland annat genom sitt alltför stora kursinnehåll. Detta bidrar till en stressreaktion hos många studenter, en slags blockering som motverkar en förståelseinriktad inläring. Som kursansvarig är man också blockerad av institutionens traditioner vad gäller denna kurs. Den skall innehålla allt det som ingår och gärna mycket mer och varje antydning till reduktion av kursinnehåll bemöts som vore en skamlöshet. Det är kanske inte heller möjligt att göra någon mer genomgripande förändring utan att dra in Algebrakursens första del. Trots att kursen i Linjär Algebra borde vara en bra miljö för förståelseinriktade övningar är jag inte säker på att man bör upprepa försöket med mindre att kursens omfång reduceras väsentligt. Man kan inte begära att studenterna skall kunna räkna snabbt och rätt, förstå en uppsjö av nya ofta mycket abstrakta begrepp och samtidigt acceptera minst ett halvt dussin nya idéer allt inom loppet av åtta veckor.

7 Utvärdering av projektet

De försök jag har gjort inte är vetenskapliga försök inom ramen för pedagogisk eller didaktisk vetenskap. Utvärderingen har därför subjektiva drag. Visserligen har jag använt kursutvärderingar på kurserna, men dessa utvärderingar har inte varit utformade så att man kan belägga hur de arbetsuppgifterna eller examinationen har påverkat studenternas läsande eller lärande. Utvärderingen av projektet har således skett via examination och subjektiva iakttagelser.

Projektet har bedrivits inom ramen för traditionella planeringsramar och den vanliga examinationen. Nackdelen med detta är naturligtvis att rörelseutrymmet inte varit särskilt stort. Fördelen är att försöket kan upprepas på vilken kurs som helst.

Hur har studenternas arbete påverkats ?

På kursvärderingarna har kommentarerna om arbetsuppgifterna varit genomgående positiva. Man beskriver uppgifterna som nyttiga, viktiga eller helt nödvändiga komplement till kurslitteraturens övningar. De speciella s.k. inlämningsuppgifterna har behandlats av praktiskt alla studerande.

Trots att studenterna har uppfattat kopplingen mellan de utdelade övningarna och examinationen har de haft en tendens att prioritera litteraturens uppgifter. Till en del är det en fråga om vad man hinner med. De utdelade uppgifterna har utan tvivel ställt ökade krav. Därför har det naturligtvis varit nödvändigt att reducera utbudet av vanliga uppgifter för att ge ordentlig plats för de nya uppgifterna. Trots att så skett har nog kurserna sammantaget blivit mer krävande. Åtminstone gäller det för de studenter som är ensidigt inriktade mot att klara sig genom att bara räkna. För de studerande som spontant är mer intresserade av begreppsliga sammanhang gäller kanske motsatsen.

Hur har tentamensresultaten påverkats ?

Först kan man konstatera att genomströmningen på projektets tre kurser varit i stort sett oförändrad. På en av kurserna (Flervariabelanalys) har genomströmningen gått upp (jämfört med VT 93 och dessförinnan) men det torde bero mest på vilka studenter som antagits till kursen.

Ser man till skrivningarnas kvalitet finns däremot en förändring. Det är ganska vanligt att studenternas skrivningar är ganska knapphändiga, att motiveringar och resonemang är rudimentära eller saknas. Denna typ av skrivningar har blivit mindre vanliga på projektets kurser, även om de fortfarande förekommer. Det är naturligt att tro att denna tendens kan ha med de förståelseinriktade övningarna att göra, eftersom dessa ofta innehåller uppmaningar som "Motivera varför ...", "Förklara hur ...", "Ta ställning till ...". Tendensen till mer verbalt resonande är hur som helst glädjande.

Hur har studenternas lärande påverkats ?

Studenterna har inte varit medvetna om att de har deltagit i ett undervisningsexperiment. De har tagit övningsuppgifterna och tentamensproblemen som självklara delar av kursen eller associerat dem med examinatorns preferenser. Det ligger därför i sakens natur att de inte själva kunnat göra en jämförande analys av hur övningsuppgifterna har påverkat deras lärande.

Det har emellertid tydligt framgått av studenternas kommentarer och arbete att de har uppfattat kopplingen mellan övningsuppgifter och examination. Att döma av skrivningarna har övningsuppgifterna också har påverkat dem i deras studier, eftersom de på tentamensskrivningarna visat sig kapabla att framgångsrikt behandla uppgifter som på vanliga kurser varit katastrofer.

Jag har under flera år sprängt in enstaka förståelseinriktade övningar bland tentamensuppgifterna och med förtvivlan tvingats konstatera att en majoritet av studenterna har misslyckats med dem. På projektets tre kurser har resultaten inte varit lika nedslående, även om de förståelseinriktade övningarna inte haft särskilt höga genomsnittspoäng. Detta gäller även sådana uppgifter som inte liknat vad som förekommit under kursens gång. Det faktum att studenterna mött oväntade situationer under kursen har sannolikt gjort dem beredda att möta nya oväntade situationer.

Vad kan en lärare lära sig ?

Det var svårare än vad jag först trodde att formulera varierade övningsuppgifter. Den matematiska jargongen och slentrianen satt hårdare än vad jag anade. Även om de exempel jag givit ovan förmodligen verkar ganska banala, så måste jag tillstå att det inneburit en icke ringa möda att formulera dem.

Studenternas reaktioner på uppgifterna har varit mycket lärorika och gett mig åtskilliga insikter om alla olika uppfattningar och missuppfattningar som är möjliga. Det har till och med blivit ett nöje att rätta tentamensskrivningar (åtminstone de femtio första). I stället för att reta mig på alla dumheter har jag börjat tänka över vilka föreställningar som ligger bakom. Jag har därigenom börjat begripa mer om hur undervisning fungerar och inte fungerar. I själva verket har studenternas reaktioner i undervisning och examination varit en viktig motor för projektets utveckling.

Har det blivit bättre ?

Mitt svar är ja. Anledningen är att jag tycker att studenternas kunskaper påverkats positivt vad gäller matematisk förståelse. Men det finns risker. En oroande möjlighet är att räknefärdigheten kan ha blivit sämre. Detta beror emellertid inte på tankegångarna bakom övningsuppgifterna, utan i så fall mer på hur genomförandet i praktiken sett ut. Det finns inget som säger att man inte kan utveckla räknefärdighet på ett metodiskt sett, tvärtom.

De experiment som jag har gjort kan upprepas på vilken matematikkurs som helst, men utformningen måste naturligtvis anpassas till kursens förutsättningar. Vissa faror lurar. Arbetsbelastningen kan lätt bli för stor. Det är viktigt att de innovativa övningsuppgifterna blir matematiskt naturliga så att de inte uppfattas som krystade.