

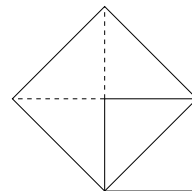
2 Analytisk geometri och linjära avbildningar

Den antika grekiska matematiken dominerades av geometri. Vi skulle i dag säga *syntetisk* geometri för att markera att man arbetade med geometriska storheter och inte, som i den *analytiska* geometrin, med formler och tal. Man skrev matematik i en verbalt förklarande (s.k. retorisk) stil. Avsaknaden av analytiska redskap och traditionens stilistiska krav begränsade så småningom utvecklingsmöjligheterna, men den antika grekiska matematiken var mycket avancerad, lång över varje "skolgeometri".

Många stora namn kan nämnas. Pythagoras (500-talet f. Kr) arbetade med aritmetik och geometri. Euklides (300-talet f. Kr) är berömd för sin bok "Elementa" i vilken han försökte inordna dåtidens geometriska vetande i en axiomatisk framställning. Senare arbetade Apollonios med kägelsnitt (alltså snitt mellan en kon och olika plan). Under första århundradet e. Kr. försökte Claudius Ptolemaios förstå planetbanornas utseende. Han är också berömd för sina kartor över den då kända världen.

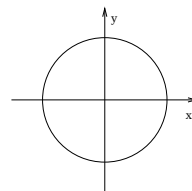
Man brukar säga att den grekiska matematiken hade ett "svagt talbegrepp". Det är naturligtvis en beskrivning som utgår från senare tiders synsätt. För oss är det självklart att man vill associera varje geometrisk sträcka med ett tal, sträckans längd. Diagonaler i en kvadrat med sidan 1 har exempelvis längden $\sqrt{2}$. Men vad är $\sqrt{2}$ för ett tal? Det som fattades i den antika grekiska matematiken var en definition av (reella) tal som låg på samma nivå av matematisk stringens som man ansåg att geometrin gjorde. I avsaknad av en sådan definition avstod man från att använda aritmetik som ett medel för att lösa geometriska problem. Behovet av tal var kanske inte så stort. Diagonalen i en kvadrat fanns ju ändå, som en geometrisk storhet, utan några tal.

I den antika grekiska matematiken förekom inte ekvationer som $x^2 = 2$. I stället kunde man ställa följande problem. Givet en kvadrat. Konstruera en annan kvadrat med dubbel så stor area. Lösningen kanske såg ut som i figuren.



Ordet *algebra* används (efter vad man vet i dag) för första gången i en lärobok om hur man läser vissa andragsgrads ekvationer av den arabiska matematikern al-Khwarizmi (i Bagdad, 800-talet e. Kr.). Denna och andra böcker utövade så småningom ett stort inflytande på västerländsk matematik. På 1500-talet analyserades tredje- och fjärdegradsekvationerna. Men man behandlade inte ekvationer som $x^2 + y^2 = 2$. Svårigheten med denna ekvation är att man inte vet vad y är! Hur skall man då kunna bestämma x ? Ser man saken så, kan man uppfatta ekvationen $x^2 + y^2 = 2$ som obestämd, (och därmed ointressant).

För att ekvationen $x^2 + y^2 = 2$ skall tilldra sig något intresse krävs idén att avsätta x och y längs två axlar. Först då får ekvationen en bestämd geometrisk innebörd.



Det är viktigt att observera *beteckningssystemets* betydelse. Man kan förstås skriva xx i stället för x^2 . Det går väl bra att skriva $xxxxx$ för x^5 också, men att skriva x^{55} på detta sätt är knappast att tänka på!

För uppkomsten av analytisk geometri krävs ett antal förutsättningar. En är tillgång till algebraiska metoder och ett bra beteckningssystem. En annan är en tillräckligt avancerad syntetisk geometri (så att man har intressanta problem att behandla). En tredje och avgörande förutsättning är idén med koordinatsystem.

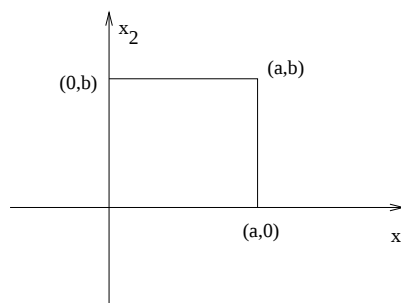
Den som först behandlade geometriska problem med hjälp av koordinater var René Descartes (1596-1650). Efter honom talar man ibland om cartesiska koordinater. Descartes var filosof och matematiker. Ett berömt uttryck för hans filosofisk tänkande var beviset för hans egen existens: Cogito, ergo sum! (Jag tänker, alltså finns jag!) År 1637 publicerade han *La Géométrie*, (ett supplement till ett filosofiskt verk) där han med stor konsekvens utvecklade sin koordinat-geometri. Även Pierre Fermat (1601-1665) uppfann (oberoende av Descartes) den analytiska geometrin, men hans arbete var mindre långtgående och publicerades först efter hans död.

I det följande beskrivs analytisk geometri på ett sätt som skulle känts främmande för Descartes och Fermat. Under 1600-talet användes analytiska redskap mest för att analysera kurvor. Man använde den nya tekniken både för att behandla kurvor som var kända i den antika Grekland och för att analysera nya och mer komplicerade kurvor. I denna framställning skall vi inte arbeta med andra kurvor än linjer. Vi skall också arbeta med vektorer, vilka inte infördes förrän på 1800-talet (av Grassman och Hamilton). Vidare används en del av den linjära algebras begrepp, (t.ex. matriser och linjära avbildningar) också de från 1800-talet.

Innehållet i den följande texten kan inte direkt karakteriseras som "geometri" i axiomatisk mening eller den Kleinska betydelsen. Det är snarare fråga om en verktygslåda, vars innehåll kommer att ha stor användningen i resten av denna skrift. Förhoppningen är att läsaren skall finna sig vara bekant med det mesta av materialet.

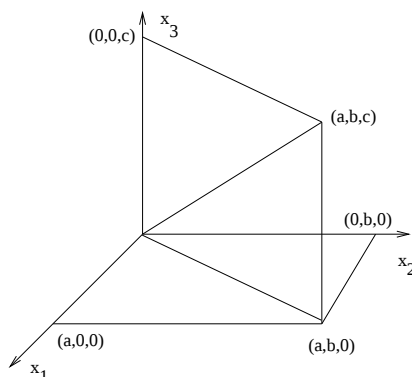
Rummen $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Mängden av alla reella tal betecknar vi med $\mathbb{R}$. Mängden $\mathbb{R}^2$ består av alla par (x_1, x_2) av reella tal x_1 och x_2 . Elementen i $\mathbb{R}^2$ kallas punkter och representeras i ett rätvinkligt koordinatsystem så som figuren antyder.



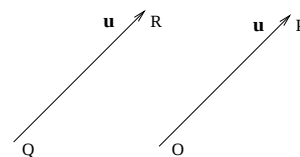
Mängden $\mathbb{R}^3$ består av alla tripplar (x_1, x_2, x_3) av reella tal x_1, x_2 och x_3 . Punkterna i $\mathbb{R}^3$

representeras geometriskt i ett rätvinkligt koordinatsystem med tre koordinataxlar.

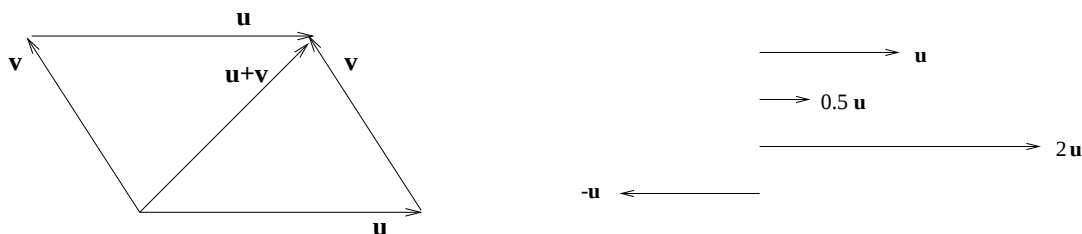


En viktig geometrisk operation i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ är parallellförflyttning eller *translation*. Alla punkter flyttas en given sträcka i en given riktning. Varje sådan parallellförflyttning kallas en *vektor*. Om man vill beskriva en translation räcker det uppenbarligen att beskriva till vilken punkt som origo O (dvs $(0, 0)$ resp. $(0, 0, 0)$) flyttas. Alla andra punkter flyttas sedan lika långt i samma riktning. Om origo flyttas till punkten P , betecknar vi motsvarande vektor med $\vec{OP}$. Om P är punkten (x_1, x_2) (eller (x_1, x_2, x_3)) skriver vi $\vec{OP} = (x_1, x_2)$ (resp. $\vec{OP} = (x_1, x_2, x_3)$). Vi kommer också att beteckna vektorer med feta små bokstäver, t.ex. $\mathbf{u} = \vec{OP}$.

En translation beskrivs alltså genom att man anger vart origo flyttas. Man kan naturligtvis också beskriva en given translation $\mathbf{u}$ genom att välja en annan punkt Q och ange till vilken punkt R den flyttas. Vi skriver då $\mathbf{u} = \vec{QR}$.



Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kan adderas. Summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ är den translation man får genom att utföra translationerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ efter varandra. (Ordningen spelar ingen roll!) Detta innebär att om $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ så är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ (och motsvarande i $\mathbb{R}^3$). Analogt definierar vi $t\mathbf{u}$ genom koordinatvis multiplikation med det reella talet t , (dvs $t(u_1, u_2) = (tu_1, tu_2)$). I figuren har vi valt $t = 1, 0.5, 2, -1$



Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är *parallella* om det finns ett reellt tal t så att $\mathbf{v} = t\mathbf{u}$ eller $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$.

I $\mathbb{R}^2$ inför vi en *standardbas* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ genom att sätta

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0) \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1).$$

En godtycklig vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ kan då skrivas $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ ty

$$u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 = u_1(1, 0) + u_2(0, 1) = (u_1, 0) + (0, u_2) = (u_1, u_2)$$

På samma sätt inför vi standardbasen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i $\mathbb{R}^3$ genom att sätta

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Varje vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^3$ kan då entydigt skrivas $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$.

Lägg märke till att ett talpar (x_1, x_2) (eller en taltrippel (x_1, x_2, x_3)) kan uppfattas på två sätt, dels som koordinater för en *punkt* P , dels som koordinater för en *vektor* $\mathbf{u}$. Sambandet är att $\mathbf{u}$ är den translation som flyttar origo till punkten P , alltså $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$.

Observera att vi reserverar operationerna addition och multiplikation med tal till vektorer. Addition av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ innebär att vi först utför den ena translationen och sedan den andra. Den resulterande translationen är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Multiplikation med ett tal ger en förlängd eller förkortad translation (och eventuellt en omkastning av orienteringen).

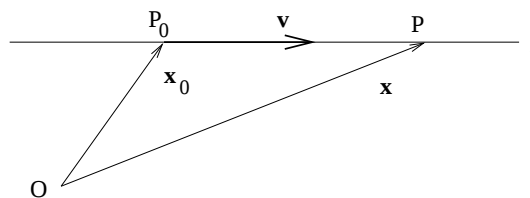
Vi använder inte addition och multiplikation med tal på punkter. Om P och Q är punkter skriver vi således *inte* $P + Q$. Om vi vill addera koordinaterna för P och Q för att definiera en punkt R , kan vi skriva $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ eller direkt skriva ut koordinaterna för R . Vi kommer således att räkna med koordinaterna för en punkt P som koordinater för en vektor $\mathbf{x}$, *koordinatvektorn* för P , definierad genom $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$.

Linjer och plan

I $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ definierar vi en *linje* ℓ genom att ange en punkt P_0 på linjen och en riktningsvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Här betecknar $\mathbf{0}$ den s.k. *nollvektorn*, dvs $\mathbf{0} = (0, 0)$ eller $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Linjen ℓ består av alla punkter P , som har egenskapen att

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v}$$

för något $t \in \mathbb{R}$. Om vi sätter $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ och $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ får vi sambandet $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, vilket vi kallar för linjens ekvation (i *parameterform*). Vi skriver kort $\ell : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$



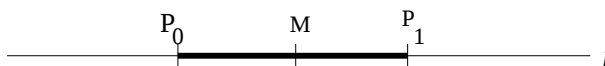
I $\mathbb{R}^3$ innebär detta följande. Antag att $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ och att P_0 har koordinatvektorn (x_{01}, x_{02}, x_{03}) , dvs $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$. Då ligger punkten P med koordinatvektorn $\mathbf{x}$ på linjen $\ell : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ då och endast då det finns ett t så att

$$\mathbf{x} = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) + t(v_1, v_2, v_3) = (x_{01} + tv_1, x_{02} + tv_2, x_{03} + tv_3)$$

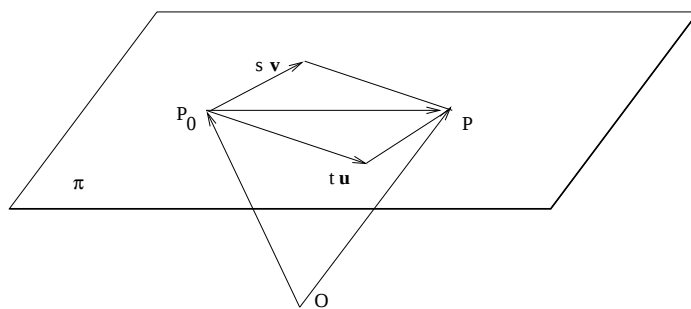
dvs

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + tv_1, \\ x_2 = x_{02} + tv_2, \\ x_3 = x_{03} + tv_3. \end{cases}$$

En punkt P ligger på linjen ℓ om P satisfierar linjens ekvation. Alternativt säger vi att linjen ℓ går genom punkten P . Genom två olika punkter P_0 och P_1 går precis en linje, nämligen linjen $\ell : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ där $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$. Observera också att det på en given linje finns en naturlig *ordningsrelation*. Vi säger att punkten Q på linjen ℓ ligger mellan P_0 och P_1 om $\overrightarrow{P_0Q} = s \overrightarrow{P_0P_1}$ för något s i intervallet $0 < s < 1$. Mängden av alla punkter som ligger mellan P_0 och P_1 utgör, tillsammans med dessa båda punkter, sträckan P_0P_1 , (med ändpunkterna P_0 och P_1). Mittpunkten M på sträckan P_0P_1 definieras genom sambandet $\overrightarrow{P_0M} = 0.5 \overrightarrow{P_0P_1}$.

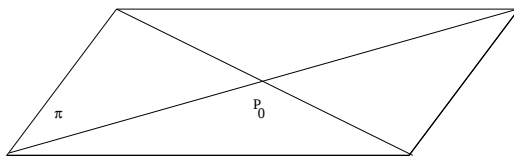


I $\mathbb{R}^3$ definerar man ett *plan* π genom att ange en punkt P_0 i planet samt två icke-parallella riktningsvektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Planet π består av alla punkter P med egenskapen $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ för några reella tal t, s . Om vi sätter $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ får vi planets ekvation $\pi : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ (i *parameterform*)



En punkt ligger i planet om dess koordinater satisfierar planets ekvation. Vi säger också att planet går genom den givna punkten. Om vi har tre givna punkter P_0, P_1, P_2 , som inte ligger på en linje, så finns precis ett plan π som går genom dem, nämligen planet $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ där $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$.

Att en linje *ligger i* ett plan innebär att varje punkt på linjen ligger i planet. Samma förhållande uttrycks genom att säga att planet *går genom* linjen. Om två icke-parallella linjer skär varandra i en punkt P_0 (dvs går genom P_0), så bestämmer dessa linjer ett plan $\pi : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ där $\mathbf{x}_0$ är koordinatvektorn för P_0 och $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ är de båda linjernas riktningsvektorer.



Skalärprodukt

Det viktigaste redskapet i analytisk geometri är *skalärprodukten* mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Med hjälp av skalärprodukten definieras en rad geometriska storheter t.ex längd av en vektor, avstånd mellan vektorer, vinklar, ortogonal projektion. Skalärprodukten betecknas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Detta tal definieras i $\mathbb{R}^2$ genom att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \quad \text{om} \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

I $\mathbb{R}^3$ sätter vi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \text{om} \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Skalärprodukten mellan två vektorer fungerar ungefär som multiplikation av två tal– ett antal naturliga räknelagar gäller. Man har till exempel att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Vidare gäller kvadreringsregeln

$$(1) \quad (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Observera att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ är en summa av kvadrater ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ om $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$), så är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ alltid icke-negativ. Därför är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ för alla $\mathbf{u}$. Dessutom är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ då och endast då $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Vi kan därför göra följande definition.

Definition 1 *Längden* av en vektor $\mathbf{u}$ är talet

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Detta innebär att

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2} & \text{om } \mathbf{u} &= (u_1, u_2) \\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} & \text{om } \mathbf{u} &= (u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

Om P och Q är två punkter kallas $|\overrightarrow{PQ}|$ för *avståndet* mellan P och Q . $\square$

Läsaren noterar kanske att vi inte hänvisar till någon figur som argument för denna definition. Det beror på att framställningen är avsedd att förbereda för framställningen av Euklidisk geometri enligt Kleins Erlangenprogram. Vi betraktar alltså inte geometriska begrepp som a priori givna, utan definierar dem med hjälp av analytiska uttryck. Därför vill vi inte motivera vår definition av längd med exempelvis Pythagoras sats, utan kommer snart nog att visa att denna sats är en följd av vår definition. I vår framställning är även begreppet *vinkel* något som måste definieras. Vi skall snart göra det med hjälp av följande olikhet.

Cauchys olikhet

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

Bevis: Vi visar satsen i $\mathbb{R}^2$. Om $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ så är

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 = (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + 2u_1 u_2 v_1 v_2.$$

Å andra sidan är

$$(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)^2 = (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2.$$

Därför är

$$(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 = u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \geq 0.$$

Detta visar olikheten i $\mathbb{R}^2$. Beviset i $\mathbb{R}^3$ är snarlikt. Man får

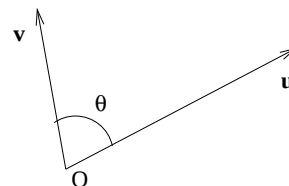
$$(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \geq 0.$$

$\square$

Observera att om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så ger Cauchys olikhet att kvoten $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$ ligger i intervallet $[-1, 1]$. Därför är denna kvot *cosinus* för en vinkel i intervallet $[0, \pi]$. Vi gör nu följande definition

Definition 2 Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ definieras *vinkeln* θ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, som det tal θ i intervallet $0 \leq \theta \leq \pi$ som uppfyller sambandet

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

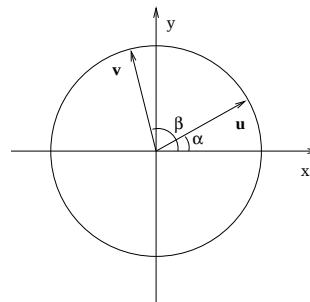


Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är *ortogonala* om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. (Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ innebär detta att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\pi/2$.) $\square$

Exempel 1 Låt oss beräkna vinkeln θ mellan vektorerna

$$\mathbf{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)), \quad \mathbf{v} = (\cos(\beta), \sin(\beta))$$

Figuren ger oss anledning att tro att $\theta = \beta - \alpha$, åtminstone om $0 \leq \beta - \alpha \leq \pi$. Vi kontrollerar om det verkligen är så.



Först observerar vi att

$$|\mathbf{u}|^2 = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1, \quad |\mathbf{v}|^2 = \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) = 1$$

och att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\beta - \alpha)$$

Alltså är

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \cos(\beta - \alpha)$$

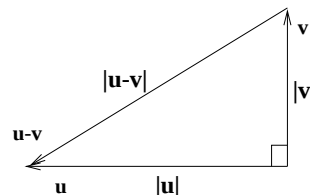
vilket som väntat ger $\theta = \beta - \alpha$ om $0 \leq \beta - \alpha \leq \pi$.

Vi kan nu ge analytiska bevis av några välbekanta geometriska resultat.

Pythagoras sats

Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala så är

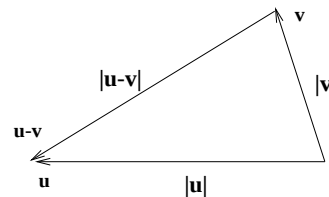
$$(2) \quad |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$$



Bevis: Kvadreringsregeln (1) ger att $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ så får vi sambandet (2).

Triangelolikheten För godtyckliga vektorer gäller

$$(3) \quad |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$



Bevis: Vi använder åter kvadreringsregeln (1), nu i kombination med Cauchys olikhet:

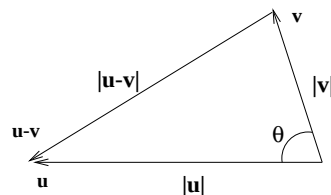
$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2$$

Detta ger (3).

Cosinus-teoremet Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så gäller

$$(4) \quad |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.



Bevis: Detta följer också ur kvadreringsregeln (1) denna gång i kombination med definitionen 2:

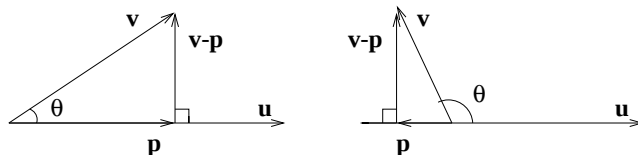
$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta)$$

□

Ortogonal projektion

Begreppet ortogonal projektion förekommer i många olika sammanhang. Man kan till exempel projicera en given punkt ortogonalt på ett plan eller på en linje. Här skall till en början vi definiera den ortogonala projektionen av en given vektor längs en annan vektor.

Definition 3 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två givna vektorer med $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Den *ortogonala projektionen* av $\mathbf{v}$ i riktningen $\mathbf{u}$ är den entydigt bestämda vektor $\mathbf{p}$, som är parallell med $\mathbf{u}$ och har egenskapen att $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$.



Sats 1 Den ortogonala projektionen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{v}$ i riktningen $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ges av formeln

$$(5) \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

Om $\mathbf{q}$ är parallell med $\mathbf{u}$ så är $|\mathbf{v} - \mathbf{p}| \leq |\mathbf{v} - \mathbf{q}|$.

Bevis. Låt $\mathbf{p}$ vara parallell med $\mathbf{u}$ och antag att $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Då är $\mathbf{p} = t\mathbf{u}$ och $(\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = 0$. Detta ger

$$0 = (\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - t\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

varav

$$t = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}.$$

vilket ger formeln (5).

Om nu $\mathbf{q}$ är en annan vektor som är parallell med $\mathbf{u}$ så är $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ också parallell med $\mathbf{u}$ och därmed ortogonal mot $\mathbf{v} - \mathbf{p}$. Pythagoras sats ger då att

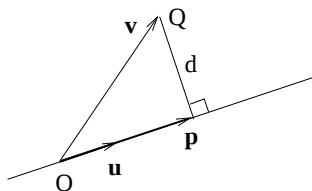
$$|\mathbf{v} - \mathbf{q}|^2 = |\mathbf{v} - \mathbf{p} + \mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 = |\mathbf{v} - \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 \geq |\mathbf{v} - \mathbf{p}|^2.$$

Alltså är $|\mathbf{v} - \mathbf{p}| \leq |\mathbf{v} - \mathbf{q}|$, med likhet då och endast då $\mathbf{q} = \mathbf{p}$. Detta visar satsens andra del.

Exempel 2 Vi skall bestämma det kortaste avståndet d från punkten $Q = (1, 2, 3)$ till linjen ℓ genom origo med riktningsvektorn $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$.

Vi bildar då den ortogonala projektionen $\mathbf{p}$ av vektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ} = (1, 2, 3)$ längs riktningsvektorn $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} = \frac{3}{6}(2, -1, 1) = (1, -0.5, 0.5)$$



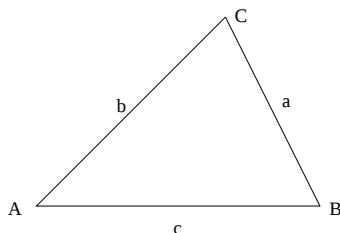
Då är

$$\mathbf{v} - \mathbf{p} = (1, 2, 3) - (1, -0.5, 0.5) = (0, 2.5, 2.5)$$

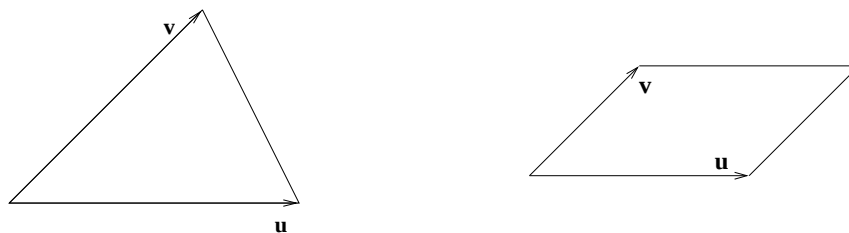
Det kortaste avståndet från Q till linjen är alltså $d = |\mathbf{v} - \mathbf{p}| = 2.5\sqrt{2}$.

Arean av parallelogrammer och trianglar

En *triangel* (i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$) definieras med hjälp av tre punkter A, B, C , vilka inte ligger på en linje. Triangeln består av *hörnen* A, B, C och sträckorna mellan dem (kallade triangelns *sidor*).



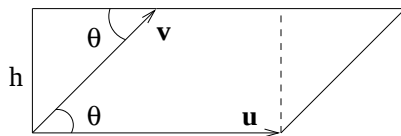
Triangeln är uppenbarligen bestämd av ett hörn, t.ex. A , och de båda vektorerna från detta hörn till de två återstående hörnen, t.ex. $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Om läget av A inte spelar någon roll eller är underförstått, talar vi om triangeln som bestäms av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Två icke-parallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ bestämmer på liknande sätt en *parallelogram*.



Vi definierar nu arean av en parallelogram genom att använda formeln “basen gånger höjden”. Arean av en triangel som bestäms av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, definieras som hälften av arean av motsvarande parallelogram.

Om θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så är arean av parallelogrammen således $|\mathbf{u}| \cdot h$. Eftersom $h = |\mathbf{v}| \sin \theta$ får vi att arean är

$$(6) \quad A = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$$



Om vi antar att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i planet kan vi lätt beräkna arean A med hjälp av koordinaterna för $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Antag nämligen att $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$. Låt $\mathbf{p}$ vara den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ längs $\mathbf{u}$, alltså

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}.$$

Då är parallelogrammens höjd

$$h = |\mathbf{v} - \mathbf{p}| = \sqrt{|\mathbf{v}|^2 - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right)^2}.$$

Arean blir alltså

$$A = |\mathbf{u}| h = \sqrt{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2}.$$

Eftersom

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2acbd = (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

får vi slutsatsen att

$$(7) \quad A = |ad - bc|$$

Vi inför här begreppet *determinant*-beteckningen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (2 \times 2 - \text{determinant})$$

Arean av den parallelogram som bestäms av vektorerna (a, b) och (c, d) är då

$$A = \pm \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Observera att vektorerna $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ är parallella om och endast om determinanten $ad - bc = 0$.

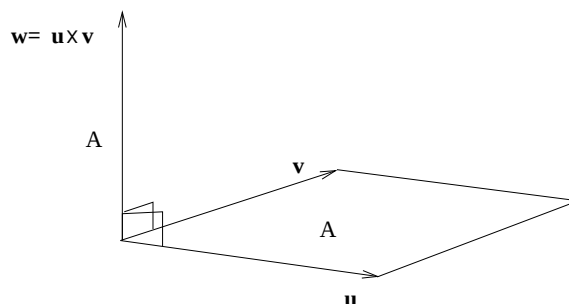
Kryssprodukten

Givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i rummet $\mathbb{R}^3$, så finns det en entydigt bestämd vektor $\mathbf{w}$ med följande egenskaper

$\mathbf{w}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och mot $\mathbf{v}$.

längden av $\mathbf{w}$ är arean av den parallelogram som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ bestämmer.

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bildar ett högersystem (dvs man kan hålla höger hands tumme, pekfinger och långfinger så att de pekar i riktningarna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$).



Kryssprodukten $\mathbf{w}$ av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ skrivs $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. De egenskaper som bestämmer kryssprodukten är således

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \\ |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| &= |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta \quad (\theta \text{ vinkeln mellan } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} &\text{ bildar högersystem.}\end{aligned}$$

Dessa egenskaper kan omarbetas till en formel med vars hjälp kryssprodukten kan beräknas. Vi tar nu denna formel som vår definition

Definition 4 Om $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ så definieras kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ genom

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Kommetar För att se att denna formel stämmer med den geometriska beskrivningen av kryssprodukt ovan låter vi $\mathbf{w}$ vara den vektor som definieras av formelns högerled. Då är det en enkel (men charmlös) sak att visa att $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ och $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$. Man ser också att

$$|\mathbf{w}|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = (|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|)^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2$$

(Jämför beviset av Cauchys olikhet.) Avsnittet om arean av en parallelogram ger då att $|\mathbf{w}|^2 = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta)^2$. Alltså har vi att $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$. Det återstår att visa att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bildar ett högersystem. Vi nöjer oss med att visa detta för det fall då $\mathbf{u}$ pekar i x_1 -axelns riktning och $\mathbf{v}$ uppåt i x_1x_2 -planet dvs $u_1 > 0, u_2 = u_3 = 0, v_2 > 0, v_3 = 0$. (Det allmänna fallet kan reduceras till detta fall genom att man roterar rummets vektorer. Vi avstår från att gå igenom detaljerna i denna reduktion.) Då är $\mathbf{w} = (0, 0, u_1v_2)$. Uppenbarligen bildar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bildar ett högersystem eftersom $\mathbf{w}$ pekar uppåt i z -axelns riktning. $\square$

Som ett exempel låter vi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Då är följande formler är en direkta konsekvenser av kryssprodukten definition

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Det är också lätt att se att

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2.$$

Observera att man för godtyckliga $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har att

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad \text{och} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Planets och linjens ekvation i normalform

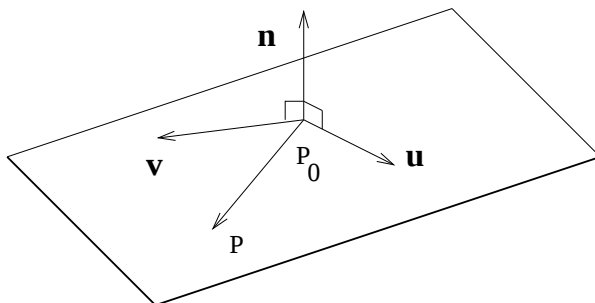
Låt $\pi : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ vara ett plan. Vi kan då bilda kryssprodukten $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{n}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så gäller att $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ för varje vektor $\mathbf{x}$ i planet. Detta innebär att

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 = 0$$

Om vi antar att $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ och sätter $d = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0$ så får vi ekvationen

$$(8) \quad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d = 0$$

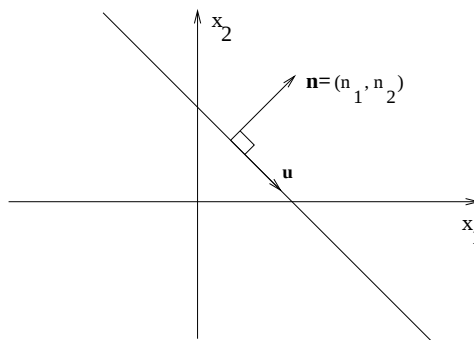
Detta är *planets ekvation i normalform*. Innebörden är att punkten P ligger i planet då och endast då koordinatvektorn $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ satisfierar ekvationen. Vektorn $\mathbf{n}$ kallas *en normal* till planet. Vi kan i ekvationen ersätta $\mathbf{n}$ med varje annan vektor $\neq \mathbf{0}$ som är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, dvs vi kan ersätta $\mathbf{n}$ med en godtycklig vektor $\neq \mathbf{0}$ som är parallell med $\mathbf{n}$.



Linjer i $\mathbb{R}^2$ kan på liknande sätt beskrivas med en ekvation på normalform:

$$(9) \quad n_1x_1 + n_2x_2 + d = 0$$

Här är $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ linjens normal, vilket innebär att $\mathbf{n}$ är en godtycklig vektor ($\neq \mathbf{0}$) som är ortogonal mot linjens riktningsvektor $\mathbf{u}$. Om $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$ är koordinaterna för en punkt på linjen så är $d = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0$. Vi beskriver situationen i en figur.



Vi ger två exempel som handlar om plan i rummet. Det första beskriver hur man kan finna normalen till ett plan med hjälp av kryssprodukt. Det andra handlar om ortogonal projektion på ett plan.

Exempel 3 Bestäm ekvationen (i normalform) för det plan som innehåller punkterna $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ och $(3, 2, 1)$.

Det sökta planet måste innehålla vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (1, 2, 3) - (0, 1, 2) = (1, 1, 1), \\ \mathbf{v} &= (3, 2, 1) - (0, 1, 2) = (3, 1, -1). \end{aligned}$$

Som normal till planet kan vi därför välja

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 4, -2).$$

Planets ekvation måste därför vara av formen

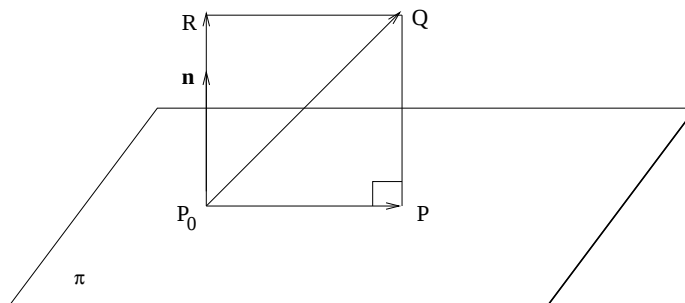
$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + d = 0.$$

Eftersom $(0, 1, 2)$ ligger i planet har vi $-2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + d = 0$ dvs $d = 0$. Planets ekvation är alltså (efter division med -2)

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

□

Om man känner en normal $\mathbf{n}$ till ett plan kan man beräkna *den ortogonala projektionen* P av en given punkt Q i planet. Den ortogonala projektionen P är den punkt i planet som ligger närmast Q . Figuren beskriver P och vi illustrerar hur man kan beräkna P i ett exempel nedan.



Exempel 4 Vi beräknar den ortogonala projektionen av $Q = (2, 1, -3)$ i planet $2x + 2y - z = 0$.

Vi börjar med att välja en punkt P_0 i planet. Här kan vi ta $P_0 = (0, 0, 0)$. Som normal väljer vi naturligtvis $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$. Om $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0Q} = (2, 1, -3)$ så är den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ längs $\mathbf{n}$ lika med

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \frac{9}{9}(2, 2, -1) = (2, 2, -1)$$

Därför är

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{v} - \mathbf{p} = (2, 1, -3) - (2, 2, -1) = (0, -1, -2)$$

Alltså är $P = (0, -1, -2)$.

Linjära avbildningar på $\mathbb{R}^2$

Det viktigaste begreppet i modern matematik är funktionsbegreppet. Många olika ord används som synonyma med ordet funktion, t.ex. avbildning, transformation, operation, operator m.fl. Valet av ord avser att indikera "hur man tänker". I geometriska sammanhang är orden avbildning och transformation de mest frekventa. Linjära transformationer är speciellt naturliga att arbeta med, eftersom sådan avbildar linjer på linjer. (Det gör även så kallade affina avbildningar. Mer om sådan funktioner kommer senare.)

Av tekniska skäl övergår vi nu till att skriva vektorer i $\mathbb{R}^2$ (och senare $\mathbb{R}^3$) som *kolonnvektorer*. En vektor i $\mathbb{R}^2$ med koordinaterna x och y skrivs alltså $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i stället för (x_1, x_2) .

Definition 5 En linjär avbildning (transformation) T i $\mathbb{R}^2$ är en funktion (tillordning), som till varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ordnar ett entydigt bestämt $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^2$, så att

$$(10) \quad T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^2$ och alla reella tal c och d .

Med hjälp av egenskapen (10) kan man beskriva hur en linjär avbildning på $\mathbb{R}^2$ måste se ut. Om nämligen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

så är

$$(11) \quad T(\mathbf{x}) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2)$$

Denna formel visar att man kan beräkna $T(\mathbf{x})$ om man känner

$$(12) \quad \mathbf{a}_1 = T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Vi inför nu 2×2 -matrisen.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Denna matris kallas för (*standard-*)*matrisen* för T . Vi inför också en multiplikation med kolonnvektor, $\mathbf{Ax}$, genom att sätt

$$\mathbf{Ax} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2$$

Med tanke på definitionen (11) av $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ så ger formeln (10) nu att

$$(13) \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$$

Observera att linjära transformationer i regel avbildar linjer på linjer. Om nämligen $\mathbf{x}$ är en punkt på linjen $\ell : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$, så är bilden av $\mathbf{x}$

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_0) + tT(\mathbf{u})$$

Bilden av linjen genom $\mathbf{x}_0$ med riktningsvektorn $\mathbf{u}$ är således linjen genom $T(\mathbf{x}_0)$ med riktningsvektorn $T(\mathbf{u})$. Här förutsätter vi dock att $T(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$! På liknande sätt inser man att linjestycket mellan två punkter avbildas i linjestycket mellan deras bilder.

Vi ger några exempel på linjära avbildningar.

Exempel 5 En viktig linjär avbildning är *rotation* (kring origo). Givet en vinkel θ , kan vi rotera vektorn $\mathbf{x}$ moturs vinkeln θ (kring origo) och får då en ny vektor $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$

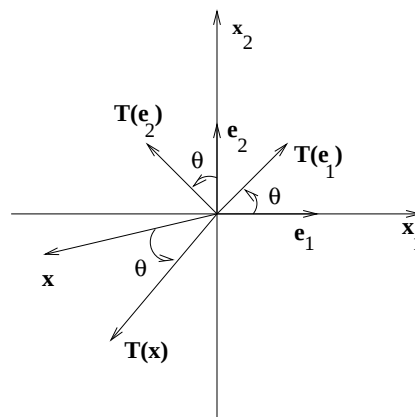
Till exempel är då (se figur)

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Det följer att matrisen för T är

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



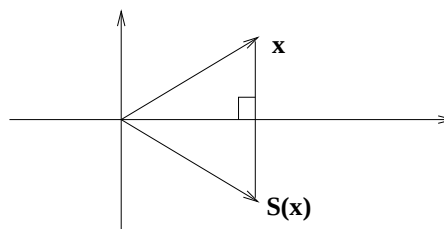
Exempel 6 *Spegling i en rät linje* (genom origo) är en annan viktig linjär avbildning. Låt oss för enkelhets skull behandla spegling i x_1 -axeln.

Om $S(\mathbf{x})$ är spegelbilden av $\mathbf{x}$ har vi tydligen

$$S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matrisen för spegling i x_1 -axeln är således

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



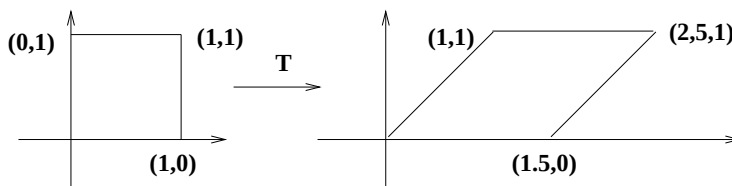
Exempel 7 Låt T vara den linjära avbildning vars (standard-)matris är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi vill undersöka bilden av kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$. Uppenbarligen är

$$T(\mathbf{e}_x) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(kolonnerna i $\mathbf{A}$!). Eftersom $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ och $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2)$ avbildas kvadraten på parallelogram vars hörn är $(0, 0)$, $(1.5, 0)$, $(2.5, 1)$, $(1, 1)$



Sammanfattning och matrismultiplikation

Sammanfattning av två transformationer innebär att man utför transformationerna efter varandra. Givet två avbildningar T och S , så kan vi först utföra S och sedan T . Vi får då sammansättningen $T \circ S$. Den definieras genom att man sätter

$$(T \circ S)(\mathbf{x}) = T(S(\mathbf{x})).$$

Om T och S är linjära avbildningar på $\mathbb{R}^2$ så är $T \circ S$ en linjär avbildning på $\mathbb{R}^2$, ty

$$T(S(c\mathbf{u} + d\mathbf{u})) = T(cS(\mathbf{u}) + dS(\mathbf{u})) = cT(S(\mathbf{u})) + dT(S(\mathbf{u})).$$

Antag nu att T har (standard-)matrisen $\mathbf{A}$ och att S har matrisen $\mathbf{B}$. Vi kan då beräkna matrisen för $T \circ S$. Antag nämligen att

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] \quad \text{där} \quad \mathbf{b}_1 = S(\mathbf{e}_1), \mathbf{b}_2 = S(\mathbf{e}_2).$$

Då är

$$\begin{aligned} (T \circ S)(\mathbf{e}_1) &= T(S(\mathbf{e}_1)) = T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \\ (T \circ S)(\mathbf{e}_2) &= T(S(\mathbf{e}_2)) = T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

Därför har $T \circ S$ standardmatriser $[\mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2]$. Denna matris betecknas $\mathbf{AB}$ (produkten av $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$), alltså

$$(14) \quad \mathbf{AB} = \mathbf{A}[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] = [\mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2]$$

Exempel 8 Antag

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

så är

$$\mathbf{AB} = \left[\mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

medan

$$\mathbf{BA} = \left[\mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$$

Observera att $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Exempel 9 Standardmatrisen för rotation vinkeln θ kring origo är

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Om vi först roterar vinkeln θ och sedan vinkeln η blir effekten densamma som att rotera vinkeln $\eta + \theta$. Sammansättningen av två rotationer (kring origo) är därför en ny rotation och vi har att

$$\mathbf{R}_\eta \mathbf{R}_\theta = \mathbf{R}_{\eta+\theta}$$

dvs

$$\begin{bmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\eta + \theta) & -\sin(\eta + \theta) \\ \sin(\eta + \theta) & \cos(\eta + \theta) \end{bmatrix}$$

Man kan också verifiera denna formel mot hjälp av additionsteoremen för sinus- och cosinusfunktionerna.

Bijektiva avbildningar och inverterbara matriser

För geometriska tillämpningar är det viktigt att man kan "ta tillbaka" en given konstruktion. Man kan så att säga vilja göra transformationen ogjord. Detta är möjligt för till exempel rotation kring origo. Om man har roterat en geometrisk figur med vinkeln θ i positiv orientering (moturs på de gamla analoga klockernas tid) så kan man återställa den gamla figuren genom att rotera vinkeln $-\theta$. Spegling i en linje kan återsällas med en ny spegling i samma linje. I matematiskt språkbruk talar man om transformationers *inverterbarhet* och om dess *invers*.

Definition 6 En avbildning T från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ är *injektiv* om olika punkter har olika bilder, dvs

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \text{ medför att } \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Avbildningen T är *surjektiv* om varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ är bild av något (minst ett) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

En avbildning är *bijektiv* om den är både injektiv och surjektiv. En bijektiv avbildning T har en *invers* T^{-1} definierad genom att $T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ ifall $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$. Då gäller

$$(15) \quad T^{-1}(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \quad T(T^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$$

för alla $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. □

Om T är en bijektiv *linjär* avbildning så är inversen T^{-1} också linjär. Om nämligen $\mathbf{a} = T^{-1}(\mathbf{u})$ och $\mathbf{b} = T^{-1}(\mathbf{v})$ så gäller $\mathbf{u} = T(\mathbf{a})$, $\mathbf{v} = T(\mathbf{b})$. Då är $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} = T(c\mathbf{a} + d\mathbf{b})$, vilket ger

$$T^{-1}(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = c\mathbf{a} + d\mathbf{b} = cT^{-1}(\mathbf{u}) + dT^{-1}(\mathbf{v})$$

Antag nu att T är en bijektiv linjär avbildning med standardmatrisen $\mathbf{A}$. Eftersom T^{-1} också är linjär har T^{-1} en standardmatris $\mathbf{B}$. Av formeln (15) får vi att $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = T(T^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ och $\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} = T^{-1}(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Därför måste kolonnerna i $\mathbf{A}\mathbf{B}$ och $\mathbf{B}\mathbf{A}$ vara $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$, dvs

$$(16) \quad \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{där} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definition 7 En kvadratisk $\mathbf{A}$ är *inverterbar* om det finns en matris $\mathbf{B}$ sådana att (15) ovan gäller. Matrisen $\mathbf{B}$ kallas *inversen* till $\mathbf{A}$ och skrivs $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Sats 2 Låt T vara en linjär avbildning på $\mathbb{R}^2$ med standardmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Då är T bijektiv då och endast då matrisen $\mathbf{A}$ är inverterbar, vilket i sin tur är ekvivalent med att determinanten

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

I så fall är

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

och $\mathbf{A}^{-1}$ är matrisen för den inversa avbildningen T^{-1} . Dessutom gäller $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$.

Bevis: Observera först att

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \quad \text{om} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Antag att T är bijektiv. Då kan inte alla talen a, b, c, d vara noll, ty i så fall avbildas alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ på nollvektorn. Om något av talen a, b, c, d är $\neq 0$, men $ad - bc = 0$, kan vi sätta $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ eller $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c \\ -d \end{bmatrix}$. Då är $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ men $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Detta visar att om T är bijektiv, så är $ad - bc \neq 0$.

För att visa den omvända implikationen antar vi att $ad - bc \neq 0$. Då måste T vara surjektiv, ty om $\mathbf{y}$ är givet kan vi sätta

$$\mathbf{x} = \tilde{T}(\mathbf{y}) = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

En enkel kalkyl visar att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Därför är T surjektiv. Samma kalkyl visar att $\tilde{T}(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}$. Detta ger även att T är injektiv. Antag nämligen att $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Sätt då $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Då följer att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{x} = \tilde{T}(T(\mathbf{x})) = \tilde{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, dvs $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Detta visar att om $ad - bc \neq 0$ så är T bijektiv. Formeln för inversen följer också. Vi överlämnar till läsaren att visa formeln för inversens determinant.

Exempel 10 Rotation kring origo är en bijektiv linjär avbildning. Ty rotationsavbildningens matris $\mathbf{R}_\theta$ har determinanten $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Man inser lätt att

$$\mathbf{R}_\theta^{-1} = \mathbf{R}_{-\theta},$$

eftersom $\mathbf{R}_{-\theta}\mathbf{R}_\theta = \mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$. (Jfr exempel 2 ovan).

Vi avslutar med en hjälpsats, som vi bland annat behöver i det kommande avsnittet om linjära avbildningar och areor.

Lemma 1 Om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är inverterbara, så är $\mathbf{AB}$ också inverterbar och

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Observera ordningen mellan matriserna i höger led.

Bevis. Formeln för inversen följer av att

$$\mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

Isometriska avbildningar och ortogonala matriser

En *isometrisk* linjär avbildning U från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ är en avbildning som bevarar längden av varje vektor, alltså

$$(17) \quad |U(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$$

för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$. Rotation kring origo är ett exempel på en isometrisk avbildning, likaså spegling i x -axeln. Följande sats beskriver hur matrisen för en isometrisk avbildning måste se ut. Satsen visar också att isometriska avbildningar även bevarar vinklar.

Sats 3 Antag att U är en linjär avbildning med matrisen $\mathbf{U}$. Då gäller att U är isometrisk då och endast då kolonnerna i $\mathbf{U}$ är ortogonala mot varandra och har längden 1. (En sådan matris kallas en ortogonal matris!) Vidare gäller

$$(18) \quad U(\mathbf{x}) \cdot U(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

för alla $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Det följer att vinkeln mellan $U(\mathbf{x})$ och $U(\mathbf{y})$ är densamma som vinkeln mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Bevis. Genom att använda räknelagarna för skalärprodukt visar man först att

$$4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

dvs

$$(19) \quad 4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2.$$

Om U är en linjär isometrisk avbildning så följer då att

$$\begin{aligned} 4U(\mathbf{x}) \cdot U(\mathbf{y}) &= |U(\mathbf{x}) + U(\mathbf{y})|^2 - |U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y})|^2 = \\ &= |U(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 - |U(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2 = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

Alltså gäller (18).

Antag nu att U har matrisen

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Om $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ så är

$$U(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}, U(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{bmatrix}.$$

Därför är

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) \cdot U(\mathbf{y}) &= (ax_1 + bx_2)(ay_1 + by_2) + (cx_1 + dx_2)(cy_1 + dy_2) = \\ &= (a^2 + c^2)x_1y_1 + (b^2 + d^2)x_2y_2 + (ab + cd)(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Således gäller (18) då och endast då

$$(20) \quad a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0.$$

Detta är emellertid ekvivalent med att kolonnerna i $\mathbf{U}$ är ortogonala och har längden 1, dvs $\mathbf{U}$ är ortogonal.

Exempel 11 Rotationsavbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{R}_\theta \mathbf{x}$ är isometrisk. Avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

är däremot inte ortogonal (ty kolonnerna är inte ortogonala).

Lemma 2 Om $\mathbf{U}$ och $\mathbf{V}$ är ortogonala matriser så är produkten $\mathbf{UV}$ det också.

Bevis. Antag att $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$ och $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$. Då är $\mathbf{UV} = [\mathbf{U}\mathbf{v}_1 \ \mathbf{U}\mathbf{v}_2]$. Eftersom

$$\mathbf{U}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{U}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

så är kolonnerna i $\mathbf{UV}$ ortogonala. De har också längden 1 ty

$$\mathbf{U}\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{U}\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j = 1$$

Linjära avbildningar och areor

Låt T vara en linjär avbildning och P en parallelogram. Eftersom T avbildar linjestycken på linjestycken, så kommer T att avbilda P på en annan parallelogram $Q = T(P)$. I den följande satsen undersöks förhållandet mellan areorna för P och Q .

Sats 4 Låt T vara en linjär avbildning med standardmatris $\mathbf{A}$ och låt P vara en parallelogram. Då är $Q = T(P)$ en parallelogram vars area är

$$\text{arean}(P) |\det(\mathbf{A})|$$

Bevis. Om P har hörn i punkterna $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_2$ och $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, så är arean av $\text{arean}(P)$ lika med

$$\text{arean}(P) = |\det(\mathbf{V})|$$

Bilden Q har hörn i $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_0 + \mathbf{A}\mathbf{v}_1$, $\mathbf{q}_0 + \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \mathbf{A}\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{q}_0 + \mathbf{A}\mathbf{v}_2$ där $\mathbf{q}_0 = \mathbf{A}\mathbf{p}_0$. Därför är arean av Q lika med

$$\text{arean}(Q) = |\det([\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \ \mathbf{A}\mathbf{v}_2])| = |\det(\mathbf{A}\mathbf{V})| = |\det(\mathbf{A})||\det(\mathbf{V})| = \text{arean}(P)|\det(\mathbf{A})|$$

Med hjälp av en (obehaglig men fullt genomförbar) räkning kan man övertyga sig om att

$$|\det(\mathbf{A}\mathbf{V})| = |\det(\mathbf{A})||\det(\mathbf{V})|$$

Därför får man att

$$\text{arean}(Q) = |\det(\mathbf{A})||\det(\mathbf{V})| = \text{arean}(P)|\det(\mathbf{A})|$$

vilket visar satsen.

Transponerad matris

För varje matris $\mathbf{A}$ finns en transponerad matris $\mathbf{A}^T$ ($\mathbf{A}$ -transponat), som erhålles ur $\mathbf{A}$ genom byte av kolonner mot rader och rader mot kolonner. Till exempel är

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T = [x \ y]$$

Om

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

så är produkten $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ definitionsmässigt lika med skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, alltså

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Därför gäller exempelvis att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala om och endast om $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$. Vidare är $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$. Därför är matrisen $\mathbf{U}$ ortogonal om och endast om

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

Linjära avbildningar i $\mathbb{R}^3$

En linjär avbildning T i $\mathbb{R}^3$ är en tillordning som till varje $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^3$ ordnar ett bestämt $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^3$, så att

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. På samma sätt som i planet kan vi till varje linjär avbildning ordna en (standard-)matris A . Om vi sätter

$$\mathbf{a}_1 = T(\mathbf{e}_1), \mathbf{a}_2 = T(\mathbf{e}_2), \mathbf{a}_3 = T(\mathbf{e}_3)$$

så är

$$(21) \quad T(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3.$$

Vi inför då 3×3 -matrisen $\mathbf{A}$ genom

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

och har då, enligt (21), att

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3.$$

På samma sätt som i planet kan vi bilda sammansättningen av två linjära avbildningar, varvid deras standardmatriser multipliceras. Man har

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] = [\mathbf{Ab}_1 \quad \mathbf{Ab}_2 \quad \mathbf{Ab}_3]$$

Definitionen av injektiv, surjektiv och bijektiv avbildning översätts utan ändring till $\mathbb{R}^3$. Vidare gäller att T är bijektiv då och endast då $\mathbf{A}$ är inverterbar, vilket är ekvivalent med att kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}$ inte ligger i samma plan. Det är också möjligt att hitta en explicit formel för den inversa matrisen $\mathbf{A}^{-1}$, men vi avstår från att reproducera denna formel.

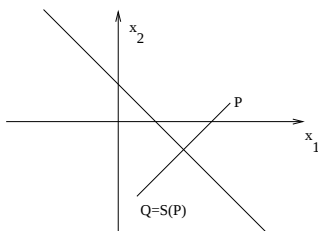
Definitionerna av isometrisk avbildning och ortogonal matris är desamma som i $\mathbb{R}^2$ och sats 4 gäller utan ändringar i formuleringarna. Lemmorna i föregående avsnitt gäller också för 3×3 -matriser. Den sista satsen om arean av en parallelogram gäller om begreppet area byts ut mot volym och parallelogram mot parallelepiped. Om $\mathbf{A} = [a_{rk}]$ så är den transponerade matrisen $\mathbf{A}^T = [a_{kr}]$.

Punkttransformationer och koordinattransformationer

Vi har hittills arbetat med transformationer av planets eller rummets *vektorer*. Eftersom varje vektorer kan uppfattas som koordinatvektor för en punkt ger varje avbildning definierad på planets eller rummets vektorer upphov till en transformation av planets eller rummets punkter. Låt nämligen T vara en transformation definierad på vektorer, så att vi till varje vektor $\mathbf{x}$ har ordnat en vektor $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$. Vi kan då till punkten P entydigt ordna en punkt Q , definierad genom att $\overrightarrow{OQ} = T(\overrightarrow{OP})$. Vi skriver då $Q = T(P)$.

Vi kan också gå den omvända vägen. Givet en transformation S definierad på planets eller rummets punkter kan vi definiera en transformation definierad på vektorer genom att till vektorn $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ordna vektorn $\mathbf{y} = \overrightarrow{OQ}$ om $Q = S(P)$.

Låt oss som ett exempel ta den avbildning S , som till punkten P ordnar dess spegelbild $Q = S(P)$ i linjen $x_1 + x_2 = 1$.



Denna ger upphov till en avbildning av planets vektorer genom att vektorn $\mathbf{x}$ avbildas på vektorn $\mathbf{y}$ där $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ och $\mathbf{y} = \overrightarrow{OQ}$. Denna avbildning kan beskrivas analytiskt med hjälp av sambandet

$$\begin{cases} y_1 = 1 - x_2 \\ y_2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

eller med matrisbeteckningar

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi tillåter oss här att skriva $S(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Vi kan således omväxlande tala om den geometriskt definierade *punkttransformationen*

$$P \mapsto Q = S(P)$$

eller den analytiskt definierade *koordinattransformationen*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Mot varje punkttransformation svara således en koordinattransformation (i ett givet koordinatsystem). Omvänt svarar mot varje koordinattransformation en punkttransformation.