

7 Differentialgeometri

Under 1600-talet användes den då nya infinitesimalkalkylen (differential- och integralkalkylen) till att studera kurvor. Dessa undersökningar utvidgades senare till studiet av ytor. Gauss publicerade 1827 en stor undersökning av ytor, i vilken han bland annat införde mått på ytors krökning. I mitten av 1800-talet lade Riemann grunden för ett nytt sätt att uppfatta geometri. Man kan kanske säga att differentialgeometrin är vår tids geometri. Denna text är en kortfattad introduktion till ett mycket omfattande ämne.

Plana kurvor

En *funktionskurva* beskrivs av en funktion f , definierad på ett intervall I . Kurvan består av alla punkter (x, y) där $y = f(x)$ och där x varierar över intervallet I . Många intressanta kurvor kan inte beskrivas på detta sätt. Exempelvis är en cirkeln inte en funktionskurva. En cirkel med radien R och medelpunkt i origo kan istället beskrivas med ekvationen

$$x^2 + y^2 = R^2$$

De punkter (x, y) som uppfyller denna ekvation har ju egenskapen att avståndet till origo är $\sqrt{x^2 + y^2} = R$. Här har man alltså beskrivit kurvan med en ekvation av formen

$$f(x, y) = k$$

där k är en konstant.

I denna text skall vi huvudsakligen beskriva kurvor på ett tredje sätt. Vi definierar en plan kurva med hjälp av två funktioner $t \mapsto x(t)$ och $t \mapsto y(t)$, där t varierar över ett intervall I . Vi säger att kurvan är given i *parameterform*. Ett enkelt exempel är en rät linje:

$$\begin{cases} x(t) = a + t\alpha \\ y(t) = b + t\beta \end{cases}$$

där $t \in \mathbb{R}$. Detta är ekvationen för en rät linje genom (a, b) med riktningsvektor (α, β) . Cirkeln med centrum i origo och radien R kan beskrivas i parameterform på följande sätt:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}$$

där $0 \leq t \leq 2\pi$.

Tangenter och normaler

Låt nu en plan kurva vara given i parameterform genom

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

där t varierar över ett intervall I . Man kan tänka på t som tid och $\mathbf{r}(t)$ som positionen vid tiden t av ett "punktformigt" föremål. I så fall representerar derivatan $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ *hastigheten* hos föremålet. Hastigheten är en vektor, som anger färdriktningen i punkten $P = \mathbf{r}(t)$, medan beloppet $|\mathbf{r}'(t)|$ är föremålets *fart*. För att inte binda våra associationer till rörliga föremål och deras banor, föredrar vi att kalla $\mathbf{r}'(t)$ för kurvans *tangentvektor* i punkten P . Vi förutsätter då att $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. I fortsättningen skall vi enbart behandla kontinuerliga kurvor vars tangentvektor existerar i varje punkt och dessutom varierar kontinuerligt (s.k. *glatta kurvor*).

Om man känner kurvans tangentvektor $\mathbf{u} = \mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ i en viss punkt $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0)$ så kan man bestämma kurvans *tangent*, dvs linjen genom (x_0, y_0) med riktningsvektor $\mathbf{u}$, alltså linjen

$$\begin{cases} x = x_0 + tx'(t_0) \\ y = y_0 + ty'(t_0) \end{cases}$$

Den linje som går genom (x_0, y_0) och som är vinkelrät mot tangenten kallar vi *normallinjen*. För att finna normallinjens ekvation behöver vi en *normal* till kurvan, dvs en vektor $\mathbf{v}$ som är vinkelrät mot tangentens riktningsvektor $\mathbf{u}$. Vi kan till exempel välja

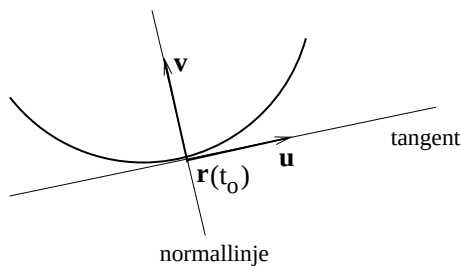
$$\mathbf{v} = (-y'(t_0), x'(t_0))$$

eftersom

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x'(t_0)(-y'(t_0)) + y'(t_0)x'(t_0) = 0$$

Normallinjens ekvation är alltså

$$\begin{cases} x = x_0 - ty'(t_0) \\ y = y_0 + tx'(t_0) \end{cases}$$



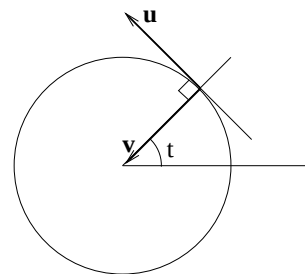
Exempel 1 En cirkel med centrum i origo och radien R kan beskrivas med parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$ där $0 \leq t \leq 2\pi$.

Cirkeln har tangentvektorn

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

Normallinjen genom punkten $\mathbf{r}(t)$ har då riktningsvektorn

$$\mathbf{v} = (-R \cos t, R \sin t)$$



Normaler och tangenter till kurvor på formen $f(x, y) = k$

För kurvor givna på formen $f(x, y) = k$ kan det vara lättare att först finna en normal och sedan bestämma tangenten. Antag att kurvan $f(x, y) = k$ har parameterframställningen $t \mapsto (x(t), y(t))$. Då gäller

$$f(x(t), y(t)) = k$$

för alla t i ett intervall I . Deriverar vi detta samband får vi (med hjälp av kedjeregeln)

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = 0$$

för alla t . Detta innebär att

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x', y') = 0$$

Alltså är vektorn

$$\mathbf{g} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

är ortogonal mot tangentvektorn (x', y') . Vektorn $\mathbf{g}$ kallas *gradienten* för f och är alltså en normal till kurvan.

Exempel 2 Precis som i exempel 1 betraktar vi cirkeln med centrum i origo och radien R . Dess ekvation är

$$x^2 + y^2 = R^2$$

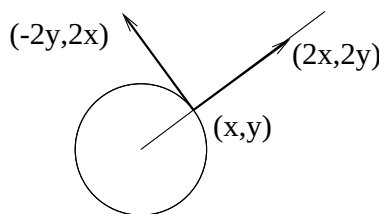
Här är $f(x, y) = x^2 + y^2$ och gradienten är

$$\mathbf{g} = (2x, 2y)$$

Vektorn $(2x_0, 2y_0)$ är således en normal till kurvan i punkten (x_0, y_0) . Därför är tangentens ekvation

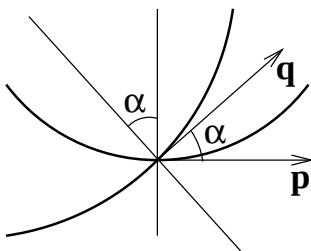
$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$$

En tangentvektor är $(-2y_0, 2x_0)$ (kontrollera).



Vinklar mellan kurvor

Antag att vi har två kurvor som passerar en viss punkt (x_0, y_0) . Vinkeln mellan kurvorna defineras då som vinkeln mellan kurvornas tangenter i punkten. Alternativt kan man definiera vinkeln mellan kurvorna som vinkeln mellan kurvornas normallinjer—det ger ju samma resultat.



Om $\mathbf{p}$ och $\mathbf{q}$ är tangentvektorer till respektive kurva så gäller för vinkeln α mellan dem att

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{p}| |\mathbf{q}|}$$

Exempel 3 Vi vill beräkna vinkeln mellan linjen $y = k(x - 1)$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i den gemensamma punkten $(1, 0)$.

Lösning 1: Här beräknar vi kurvornas tangentvektorer i den givna punkten och bestämmer vinkeln mellan dem.

Cirkelns ekvation i parameterform är

$$\mathbf{r}_1(t) = (\cos t, \sin t)$$

Här ger $t = 0$ den gemensamma punkten $(1, 0)$. Tangentvektorn i denna punkt blir

$$\mathbf{p} = (-\sin 0, \cos 0) = (0, 1)$$

Linjen beskrivs till exempel med

$$\mathbf{r}_2(s) = (s, k(s - 1))$$

Här ger $s = 1$ den gemensamma punkten. Tangentvektorn är

$$\mathbf{q} = (1, k)$$

Vinkeln α uppfyller därför sambandet

$$\cos \alpha = \frac{(0, 1) \cdot (1, k)}{1 \cdot \sqrt{1 + k^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$$

Lösning 2: Här bestämmer vi vinkeln mellan kurvornas normaler i den givna punkten. Vi beskriver då cirkeln med hjälp av ekvationen $x^2 + y^2 = 1$.

Gradienten till cirkeln är $\mathbf{v}_1 = (2x, 2y) = (2, 0)$ i punkten $(x, y) = (1, 0)$. Linjens ekvation kan skrivas $kx - y = k$ så linjens normal är $\mathbf{v}_2 = (k, -1)$. Vinkeln α mellan kurvorna ges därför av sambandet

$$\cos \alpha = \frac{(2, 0) \cdot (k, -1)}{2\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$$

Båglängd och krökning

Vi har en kurva $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ där $t \in I$. Kurvans *båglängd* definieras då som integralen

$$(1) \quad \int_I |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

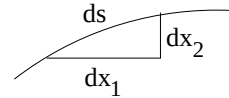
Denna formel ges med fördel en ”infinitesimal” motivering i nedanstående figur.

Här är ds det infinitesimala ”bågelementet”, definierat genom

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Sätter vi in $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$ så får vi
 $(ds)^2 = ((x'(t))^2 + (y'(t))^2)(dt)^2$ d.v.s.

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$$



Båglängden är då integralen $\int_I ds$.

En mera stringent motivering för formeln (1) involverar approximation av kurvan med polygon, i kombination med medelvärdessatsen och gränsvärden av Riemannsummor.

Om vi tänker på en kurva som banan för ett rörligt föremål, så kan vi beskriva rörelsen på två naturliga sätt. Det ena är att ange vid vilken tidpunkt t som föremålet befinner sig i en viss punkt P på banan. Vi har då t som ”parameter”. Det andra sättet är att ange den sträcka s som föremålet har färdats längs banan när den nått fram till punkten P . Vi har då båglängden s som parameter. Sambandet mellan s och t är

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau.$$

Eftersom $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| > 0$ (om kurvan är glatt) så är $s = s(t)$ en kontinuerlig och strängt växande funktion av t . Dess invers $t = t(s)$ är då också kontinuerlig och strängt växande med derivatan

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Genom att sätta $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t(s))$ inför vi båglängden som parameter.

För att skilja på derivator med avseende på t och med avseende på s , använder vi oss av följande konvention. Derivator med avseende på t betecknas med $'$ (t.ex. $\mathbf{r}'$), medan derivator med avseende på s skrivs $\cdot$ (t.ex. $\dot{\mathbf{r}}$). Vi har då exempelvis

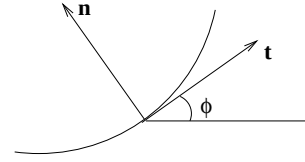
$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}.$$

Detta innebär att $\dot{\mathbf{r}}$ har längden 1, d.v.s. att $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}(s)$ är kurvans *enhetstangent* i punkten $P = \mathbf{r}(s)$. Eftersom $\mathbf{t}$ har längden 1 måste vi kunna skriva $\mathbf{t} = (\cos \phi, \sin \phi)$.

Vektorn

$$\mathbf{n} = (\cos(\phi + \frac{\pi}{2}), \sin(\phi + \frac{\pi}{2})) = (-\sin \phi, \cos \phi)$$

är ortogonal mot $\mathbf{t}$ och kallas kurvans enhetsnormal.



Om vi förflyttar oss längs kurvan kommer enhetstangenten $\mathbf{t} = (\cos \phi, \sin \phi)$ att variera. Vinkeln ϕ beror med andra ord på s (och t). Förändringshastigheten hos ϕ är ett mått på hur mycket kurvan böjer sig. Talet

$$(2) \quad \kappa = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$$

kallas därför kurvans *krökning*. Observera att om $\mathbf{t} = (\cos \phi, \sin \phi)$ så är $\dot{\mathbf{t}} = (-\sin \phi, \cos \phi)\dot{\phi}$, d.v.s.

$$(3) \quad \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}.$$

Exempel 4 Låt kurvan vara en cirkel med radien R . Då är $\mathbf{r}(t) = (a, b) + R(\cos t, \sin t)$, där (a, b) är cirkelns medelpunkt och $0 \leq t \leq 2\pi$. Då är $s' = |\mathbf{r}'(t)| = R$, d.v.s. $\dot{\mathbf{t}} = 1/R$. Enhetstangenten är således

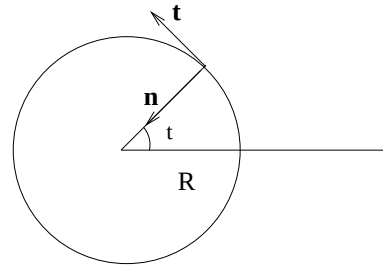
$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \frac{1}{R} = (-\sin t, \cos t) = (\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2})).$$

Detta ger enhetsnormalen $\mathbf{n} = (\cos(t + \pi), \sin(t + \pi))$ d.v.s.

$$\mathbf{n} = -(\cos t, \sin t).$$

Eftersom $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{t}' \frac{1}{R} = -(\cos t, \sin t) \frac{1}{R}$ får vi $\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{R} \mathbf{n}$, d.v.s.

$$\kappa = \frac{1}{R}.$$

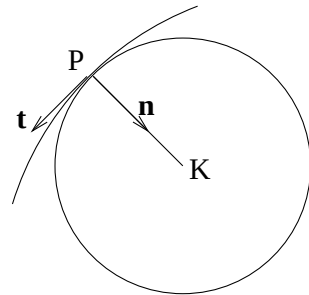


Krökningen är alltså lika i alla punkter och lika med det inverterade värdet av radien. (Den negativt orienterade cirkeln har motsvarande negativa krökning! $\square$)

Definition 1 Låt P vara en punkt på en godtycklig kurva.

Krökningsscirkeln C är den cirkel genom P vars radie (*krökningssradien*) är $R = 1/\kappa$ och vars medelpunkt K (*krökningssentrum*) uppfyller sambandet

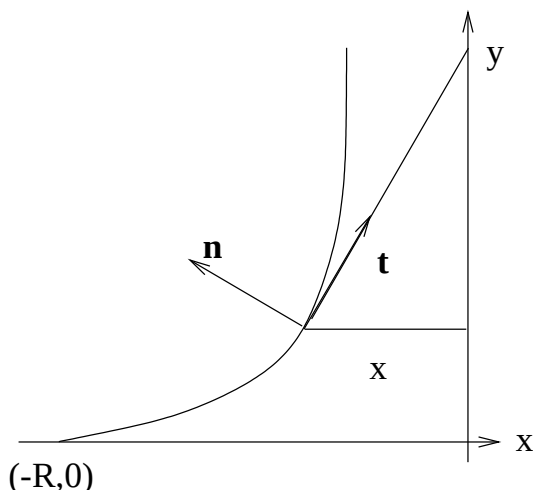
$$\vec{OK} = \vec{OP} + R\mathbf{n}.$$



Krökningsscirkeln är den cirkel genom P , som närmast ansluter sig till kurvan

Det finns en stor mängd intressanta kurvor som har studerats genom århundradena. I den grekiska geometrin studerades bland annat kägelsnitt (ellips, parabel, hyperbel). Studiet av dessa kurvor återupptogs på sextonhundratalet med den tidens nya hjälpmedel och en lång rad nya kurvor kom till. Vi ger här ett enda exempel.

Exempel 5 [Släpkurvan, traktrix] Ett R meter långt snöre är fäst vid ett föremål. En person släpar föremålet genom att dra i snöret. Till en början befinner sig föremålet i punkten $(-R, 0)$ och personen i origo. Föremålet släpas utmed positiva y -axeln. Den kurva föremålet följer kallas släpkurvan. Ur figuren får vi fram tangentens lutning. Detta ger



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}$$

Eftersom

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(dx)^2$$

får vi

$$(ds)^2 = \left(1 + \frac{R^2 - x^2}{x^2}\right)(dx)^2 = R^2 \frac{(dx)^2}{x^2}$$

d.v.s

$$ds = R \frac{dx}{x}$$

Det är inte svårt att beräkna släpkurvans krökning. Enhetstangenten måste vara $\mathbf{t} = (x, \sqrt{R^2 - x^2})/R$ och dess enhetsnormal är därför $\mathbf{n} = (-\sqrt{R^2 - x^2}, x)/R$ och

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{dx} \frac{dx}{ds} = \left(1, -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \cdot \frac{x}{R^2} = -\frac{x}{R\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{R} (-\sqrt{R^2 - x^2}, x)$$

varav

$$\kappa = -\frac{x}{R\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Kurvor i rummet

En rymdkurva beskrivs med hjälp av en funktion $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ där $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ och t varierar i något intervall I . Tangentvektorn $\mathbf{r}'(t)$ definieras som i $\mathbb{R}^2$ med hjälp av koordinatvis derivation alltså

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Båglängden av en rymdkurva definieras som för plana kurvor. Båglängden är

$$\int_I ds, \quad \text{där} \quad ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$$

Exempel 6 Parallellcirkel på en sfär är exempel på kurvor i rummet. Låt oss anta att sfären har medelpunkt i origo och radien 1. Vi kallar denna sfär för *enhetssfären*. En punkt på sfären kan beskrivas med sin latitud (breddgrad) θ och sin longitud (längdgrad) ϕ . Punktens koordinater är

$$(x, y, z) = (\cos(\theta) \cos(\phi), \cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta))$$

Här varierar ϕ och θ i intervallen $-\pi \leq \phi \leq \pi$ och $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Punkterna på en parallellcirkel har samma breddgrad $\theta = \theta_0$. Det betyder att parallellcirkeln kan beskrivas med parameterframställningen

$$\phi \mapsto (\cos(\theta_0) \cos(\phi), \cos(\theta_0) \sin(\phi), \sin(\theta_0)), \quad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

Här är alltså ϕ vår parameter. Derivation med avseende på ϕ ger tangentvektorn

$$\mathbf{p} = (-\cos(\theta_0) \sin(\phi), \cos(\theta_0) \cos(\phi), 0)$$

Eftersom $|\mathbf{p}| = \cos(\theta_0)$ så är parallellcirkelns båglängd (omkrets)

$$\int_{-\pi}^{\pi} ds = 2\pi \cos(\theta_0)$$

Exempel 7 Meridianerna på enhetssfären är kurvor som förenar punkter med samma longitud $\phi = \phi_0$. En meridian ges alltså av parameterframställningen

$$\theta \mapsto (\cos(\theta) \cos(\phi_0), \cos(\theta) \sin(\phi_0), \sin(\theta)), \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

En tangentvektorn $\mathbf{q}$ får vi genom att derivera med avseende på parametern θ :

$$\mathbf{q} = (-\sin(\theta) \cos(\phi_0), -\sin(\theta) \sin(\phi_0), \cos(\theta))$$

Båglängden av en godtycklig meridian är naturligtvis 2π .

Exempel 8 [Skruvlinjen]

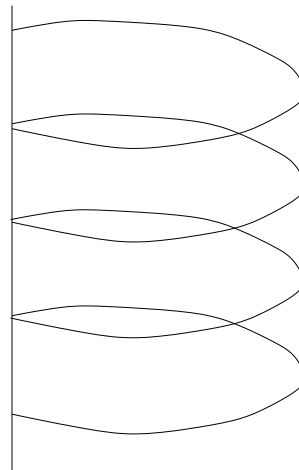
Vi betraktar kurvan

$$t \mapsto (a \cos(t), a \sin(t), ct)$$

där $-\infty < t < \infty$. Om $x = a \cos(t)$, $y = a \sin(t)$ och $z = ct$ så gäller (för alla t) att $x^2 + y^2 = a^2$. Detta innebär att kurvan ligger på en cylinder så som figuren försöker visa.

En tangentvektor till skruvlinjen är

$$(-a \sin(t), a \cos(t), c)$$



Vinklar mellan kurvor i rummet

Låt två kurvor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t)$ och $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(s)$ vara givna. Här är t och s parametrar, s är inte nödvändigtvis båglängden! Antag att kurvorna har en punkt $\mathbf{r}_0$ gemensam. Då definieras vinkeln α mellan kurvorna (i den gemensamma punkten), som vinkeln mellan kurvornas tangentvektorer i punkten. Om vi alltså antar att

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}'_1(t_0), \quad \mathbf{q} = \mathbf{r}'_2(s_0)$$

där $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(s_0) = \mathbf{r}_0$, så ges vinkeln α av sambandet

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{|\mathbf{p}| |\mathbf{q}|}$$

Exempel 9 Meridianer och parallellcirklar på enhetssfären är ortogonala. Vi visar det här genom att använda formeln ovan. Betrakta alltså den parallellcirkel och den meridian som går genom den punkt på enhetssfären som bestäms av latituden $\theta = \theta_0$ och longituden $\phi = \phi_0$. Parallellcirkelns tangentvektor är (se exempel 6 ovan)

$$\mathbf{p} = (-\cos(\theta_0) \sin(\phi_0), \cos(\theta_0) \cos(\phi_0), 0)$$

Meridianens tangentvektor är då (se exempel 7)

$$\mathbf{q} = (-\sin(\theta_0) \cos(\phi_0), -\sin(\theta_0) \sin(\phi_0), \cos(\theta_0))$$

Vi ser att

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (-\cos(\theta_0) \sin(\phi_0))(-\sin(\theta_0) \cos(\phi_0)) + \cos(\theta_0) \cos(\phi_0)(-\sin(\theta_0) \sin(\phi_0)) = 0$$

Alltså är $\mathbf{p}$ och $\mathbf{q}$ ortogonala.

Exempel 10 Vi skall här visa hur man kan bestämma vinkeln mellan en godtycklig kurva på enhetssfären och en parallellcirkel. En godtycklig kurva på enhetssfären kan beskrivas med hjälp av två funktioner $\phi = \phi(t)$ och $\theta = \theta(t)$, där t varierar över något intervall. Om vi tänker på t som tid, så beskriver vi alltså kurvan genom att ange longitud och latitud för kurvans punkter vid olika tidpunkter. Kurvan är således

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (\cos(\theta(t)) \cos(\phi(t)), \cos(\theta(t)) \sin(\phi(t)), \sin(\theta(t)))$$

Om man vill bestämma vinkeln mot en meridian måste man derivera höger led. Man får då tillämpa räkneregler för derivation av en produkt och derivation av en sammansatt funktion. Sätter man

$$\theta_0 = \theta(t_0), \quad \phi_0 = \phi(t_0)$$

och

$$\mathbf{p} = (-\cos(\theta_0) \sin(\phi_0), \cos(\theta_0) \cos(\phi_0), 0)$$

$$\mathbf{q} = (-\sin(\theta_0) \cos(\phi_0), -\sin(\theta_0) \sin(\phi_0), \cos(\theta_0))$$

så får man tangentvektorn

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t_0) = a\mathbf{p} + b\mathbf{q}, \quad \text{där } a = \phi'(t_0), \quad b = \theta'(t_0)$$

Vi vill nu beräkna vinkeln α mellan den kurvan och parallellcirkeln $\theta = \theta_0$. Enligt exempel 6 har parallellcirkeln tangentvektorn $\mathbf{p}$. Därför är

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r}'| |\mathbf{p}|}$$

Nu är

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{p} = a\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + b\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = a \cos^2(\theta_0)$$

eftersom $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$ och $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \cos^2(\theta_0)$. Vidare är

$$|\mathbf{r}'|^2 = a^2 |\mathbf{p}|^2 + b^2 |\mathbf{q}|^2 = a^2 \cos^2(\theta) + b^2$$

eftersom $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$ och $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1$. Alltså är

$$\cos(\alpha) = \frac{a \cos(\theta_0)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\theta_0) + b^2}}, \quad \text{där } a = \phi'(t_0), \quad b = \theta'(t_0)$$

Konforma och ytriaktiga kartor

En plan karta av enhetssfären är en avbildning som till varje punkt på enhetssfären (eller eventuellt en del av den) ordnar en punkt (X, Y) i planet. Om vi beskriver punkterna på sfären med sin latitud θ och sin longitud ϕ , så betraktar vi X och Y som funktioner av ϕ och θ , alltså

$$X = X(\phi, \theta), \quad Y = Y(\phi, \theta)$$

Parallellcirkeln $\theta = \theta_0$ avbildas exempelvis på kurvan

$$\phi \mapsto (X(\phi, \theta_0), Y(\phi, \theta_0))$$

Genom att derivera kan vi beräkna en tangentvektor i punkten $\phi = \phi_0$. Man får tangentvektorn

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial X}{\partial \phi}, \frac{\partial Y}{\partial \phi} \right)$$

där derivatorna skall beräknas i punkten (ϕ_0, θ_0) . På liknande sätt avbildas meridianen $\phi = \phi_0$ på kurvan

$$\theta \mapsto (X(\phi_0, \theta), Y(\phi_0, \theta))$$

Denna kurva har tangentvektorn

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right)$$

Eftersom parallellcirkel och meridianer skär varandra i under rät vinkel så måste en konform (vinkelriktig) karta ha egenskapen att deras bilder också skär varandra under rät vinkel. Om kartan är konform så gäller alltså att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Detta villkor räcker emellertid inte för att garantera att bilden av två godtyckliga kurvor har samma vinkel som motsvarande kurvor på sfären. Följande sats beskriver vad man ytterligare måste kräva.

Sats 1 *En kartprojektion $(\phi, \theta) \mapsto (X(\phi, \theta), Y(\phi, \theta))$ är konform om och endast om*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cos^2(\theta)$$

för alla ϕ och θ . Här är

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\partial X}{\partial \phi}, \frac{\partial Y}{\partial \phi} \right), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right)$$

Bevis: Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att en karta är konform är följande: Om en kurva på sfären bildar vinkeln α mot en parallellcirkel, så kommer kartbilden av kurvan att bilda samma vinkel α mot bilden av parallellcirkeln. Vi undersöker nu vad detta villkor ger.

Låt alltså $\phi = \phi(t)$ och $\theta = \theta(t)$ definiera en kurva på enhetssfären. Sätt $\phi_0 = \phi(t_0)$ och $\theta_0 = \theta(t_0)$ och $a = \phi'(t_0)$, $b = \theta'(t_0)$. Enligt exempel 10 uppfyller vinkeln α mellan kurvan och parallellcirkeln $\theta = \theta_0$ sambandet

$$\cos(\alpha) = \frac{a \cos(\theta_0)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\theta_0) + b^2}}$$

Nu skall vi bestämma ett motsvarande samband för vinkeln β mellan bilden av kurvan och bilden av parallellcirkeln och sedan se vad som krävs för att $\alpha = \beta$. Bilden av kurvan är

$$t \mapsto (X(\phi(t), \theta(t)), Y(\phi(t), \theta(t)))$$

Genom att derivera finner vi att en tangentvektor är $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. Vi har därför att

$$\cos(\beta) = \frac{(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}}{|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}| |\mathbf{u}|}$$

På en konform karta måste vi ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Då gäller

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

och

$$|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}|^2 = a^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + b^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

Alltså är

$$\cos(\beta) = \frac{a|\mathbf{u}|}{\sqrt{a^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + b^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}$$

Genom att kvadrera ser man nu enkelt att villkoret $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ är ekvivalent med att

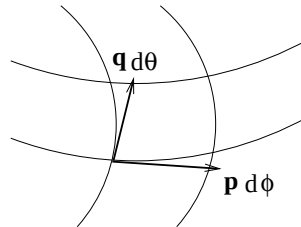
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cos^2(\theta)$$

Vi övergår nu till en diskussion om ytriktiga kartor. En ytriktig karta har egenskapen att förhållandet mellan areorna av två områden på sfären är detsamma som förhållandet mellan areorna av deras bilder. Detta innebär att det finns en proportionalitetskonstant k så att $A = ka$, där a är arean av ett område (vilket som helst) på sfären och A är arean av kartans bild av området. För att förstå vad detta innebär räcker det att jämföra "infinitesimala" områden på sfären med dess bild.

Figurens infinitesimala område har arean

$$da = |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| d\phi d\theta$$

där $\mathbf{p}$ är tangentvektorn för en parallellcirkel och $\mathbf{q}$ är tangentvektorn för en meridian. (Se exempel 10.)



Nu är

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = (\cos^2(\theta) \cos(\phi), \cos^2(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta) \sin(\theta))$$

Detta ger

$$|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \cos(\theta)$$

På liknande sätt är arean av kartan bild lika med arean av den parallelogram som bestäms av vektorerna $\mathbf{u}d\phi$ och $\mathbf{v}d\theta$, dvs

$$dA = \left| \frac{\partial X}{\partial \phi} \frac{\partial Y}{\partial \theta} - \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial \phi} \right| d\phi d\theta$$

Vi kommer på detta sätt fram till följande sats.

Sats 2 En kartprojektion $(\phi, \theta) \mapsto (X(\phi, \theta), Y(\phi, \theta))$ är ytriktig om och endast om det finns en konstant k så att

$$\left| \frac{\partial X}{\partial \phi} \frac{\partial Y}{\partial \theta} - \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial \phi} \right| = k \cos(\theta)$$

för alla ϕ och θ .

Kurvor på ytor

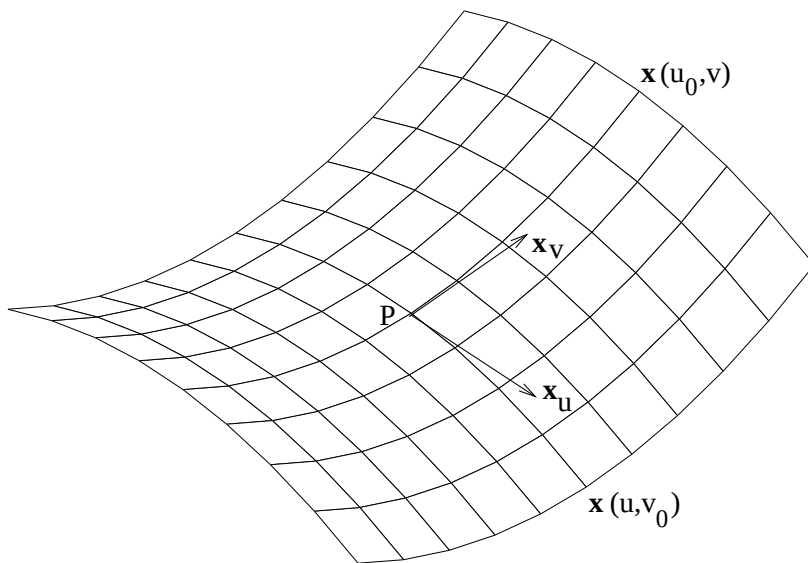
En yta i rummet definieras med hjälp av en funktion av två parametrar u, v , alltså

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

Här varierar (u, v) i ett område Ω i $\mathbb{R}^2$. En kurva vars alla punkter tillhör ytan kallas en *kurva på den givna ytan*. Om $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ är en given punkt på ytan så går genom P två så kallade parameterkurvor nämligen kurvorna

$$u \mapsto \mathbf{x}(u, v_0) \quad \text{och} \quad v \mapsto \mathbf{x}(u_0, v).$$

Parameterkurvorna är exempel på kurvor på den givna ytan.



Parameterkurvornas tangenter är

$$\mathbf{x}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right), \quad \mathbf{x}_v = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right).$$

Om $\mathbf{x}_u \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$ i punkten $P = \mathbf{x}(u, v)$ så bestämmer $\mathbf{x}_u$ och $\mathbf{x}_v$ ett plan genom P , *tangentplanet* i P .

En godtycklig kurva på ytan beskrivs av två funktioner $u = u(t), v = v(t)$. Kurvan är $t \mapsto \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Dess tangentvektor är (enligt kedjeregeln) $\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$. Bågelementet längs kurvan är $ds = |\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'| dt$, vilket ger

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \cdot (\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(u')^2 + 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v u'v' + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v (v')^2$$

Vi skriver detta samband

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

där då

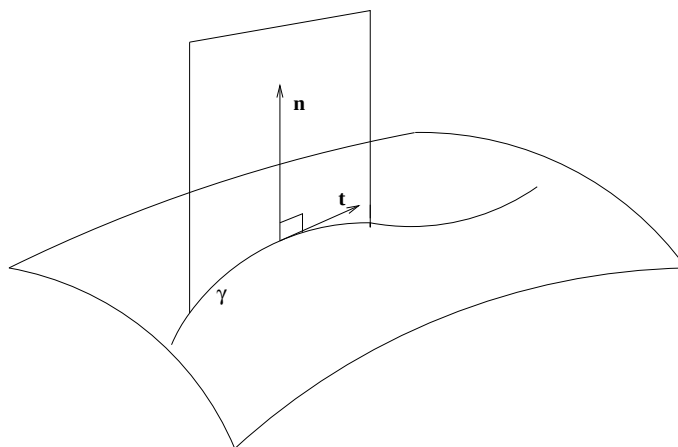
$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v.$$

Vektor $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ är normal till tangentplanet. Dess längd är arean av den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{x}_u$ och $\mathbf{x}_v$, d.v.s. $\sqrt{EG - F^2}$. Vektorn

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\sqrt{D}}, \quad D = EG - F^2$$

är därför en enhetsnormal till tangentplanet.

Om vi nu skär vår yta med olika plan som innehåller enhetsnormalen $\mathbf{n}$, kommer vi få en skara av kurvor genom den givna punkten P . Var och en av dessa kurvor har en viss krökning i P . Om planet innehåller vektorn $\mathbf{t}$ i tangentplanet får vi en viss kurva γ på ytan. Dess krökning kallas ytans *normalkrökning* i riktningen $\mathbf{t}$.



Normalkrökningen beror på vilken riktning man valt. Man kan visa att det finns två extremvärden (ett minsta och ett största) κ_1 och κ_2 som normalkrökningen i en punkt kan anta. Med hjälp av dessa definierar man sedan ytans *medelkrökning* genom

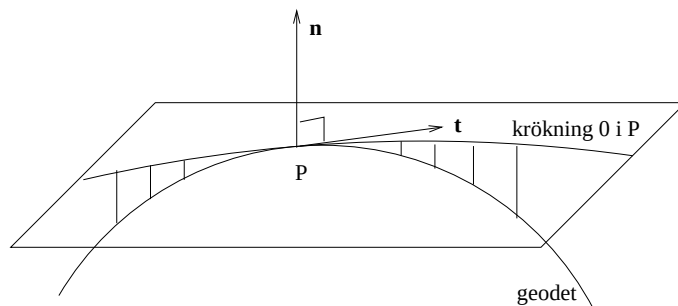
$$M = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

Ytans *totalkrökning* (Gauss-krökning) ges av

$$K = \kappa_1 \kappa_2.$$

Totalkrökningen kan beräknas med hjälp av enbart E, F, G och dess derivator. Detta är en följd av Gauss berömda sats som han kallade Teorema egregium (d.v.s. den ypperliga satsen). Medelkrökningen spelar en roll i samband med s.k. minimalytor (såpbubbleytor).

De viktigaste kurvorna på en yta är de *geodetiska* kurvorna. Dessa svarar mot de rätta linjerna i ett plan. En kurva är geodetisk om det i varje punkt gäller att kurvans ortogonala projektion i tangentplanet har en krökning i tangentplanet som är noll.



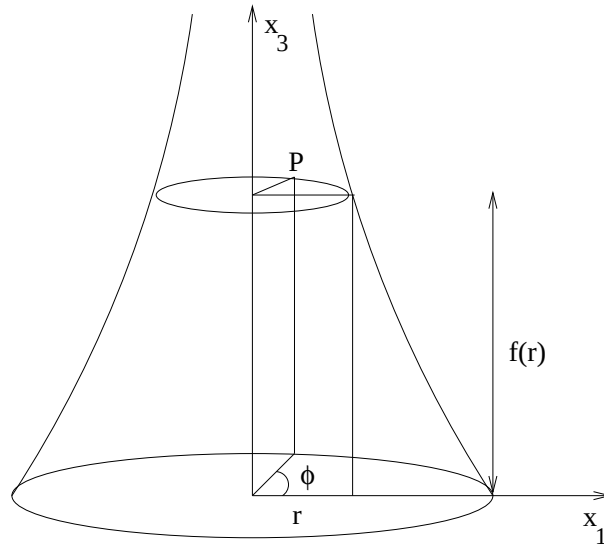
Givet en punkt P och en riktning $\mathbf{t}$, så går genom P precis en geodetisk kurva i riktningen $\mathbf{t}$. Däremot gäller det inte alltid att det genom två olika punkter P och Q på ytan, går precis en geodetisk kurva. Det gäller till exempel inte på sfären om P och Q ligger på en diameter. En geodetisk kurva som sammanbinder P med Q behöver inte nödvändigtvis ha kortast båglängd, men om en kurva som sammanbinder P med Q har kortast längd så är kurvan geodetisk.

Rotationsytor

I fortsättningen inskränker vi oss till att behandla så kallade rotationsytor. En sådan erhålles genom att man låter en given kurva rotera runt en axel. Vi låter denna axel vara x_3 -axeln och tänker oss att den givna kurvan definieras av en funktion $f(r)$, där r genomlöper ett intervall I. I figuren är

$$P = (r \cos \phi, r \sin \phi, f(r))$$

Här använder vi alltså parametrarna r och ϕ .



Med $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, f(r))$ får vi

$$\mathbf{x}_r = (\cos \phi, \sin \phi, f'(r)) \quad \mathbf{x}_\phi = (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0)$$

Detta ger $E = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = 1 + (f'(r))^2$, $F = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\phi = 0$ och $G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = r^2$. Här är alltså parameterkurvorna ortogonala (eftersom $\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\phi = 0$). Detta ger att

$$(ds)^2 = (1 + (f'(r))^2)(dr)^2 + r^2(d\phi)^2$$

Sats 3 Rotationsytans totalkrökning är

$$K = \frac{f'(r)f''(r)}{rE^2}$$

där

$$E = 1 + (f'(r))^2.$$

Ytans medelkrökning är

$$M = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left(\frac{rf'(r)}{\sqrt{E}} \right).$$

Bevis: För att bestämma enhetsnormalen observerar vi att

$$\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\phi = (-rf'(r) \cos \phi, -rf'(r) \sin \phi, r).$$

Eftersom $D = EG - F^2 = r^2(1 + (f'(r))^2)$ får vi enhetsnormalen

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{D}} \mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(r)^2}} (-f'(r) \cos \phi, -f'(r) \sin \phi, 1).$$

Låt nu $\mathbf{t}$ vara en enhetsvektor i tangentplanet. Den kurva γ som skärs ut av planet som bestäms av $\mathbf{t}$ och $\mathbf{n}$ har $\mathbf{t}$ som tangentvektor och $\mathbf{n}$ är kurvans normal i det valda planet. Krökningen κ_n hos γ ges därför av $\dot{\mathbf{t}} = \kappa_n \mathbf{n}$. Derivation av sambandet $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ ger att $\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0$, d.v.s. $\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} = -\kappa_n \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\kappa_n$. Vi får alltså

$$\kappa_n = -\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{n}} = -(\mathbf{x}_r \dot{r} + \mathbf{x}_\phi \dot{\phi}) \cdot (\mathbf{n}_r \dot{r} + \mathbf{n}_\phi \dot{\phi}).$$

Att räkna ut produkten i höger led kräver enbart ett visst tålamod. Man får lätt att

$$\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{n}_\phi = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{n}_r = 0, \quad \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{n}_r = -e, \quad \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = -g$$

där

$$e = \frac{f''}{\sqrt{E}}, \quad g = \frac{r f'(r)}{\sqrt{E}}.$$

Detta ger

$$\kappa_n = e(\dot{r})^2 + g(\dot{\phi})^2 = \frac{e}{E}E(\dot{r})^2 + \frac{g}{G}G(\dot{\phi})^2.$$

Eftersom

$$E(\dot{r})^2 + G(\dot{\phi})^2 = 1, \quad (ds)^2 = E(dr)^2 + G(d\phi)^2$$

ser vi att extremvärdena för κ_n är $\kappa_1 = e/E$ och $\kappa_2 = g/G$. Detta ger följande uttryck för totalkrökningen resp. medelkrökning

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{G} M = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right)$$

Stoppar man in uttrycken för E, G, e, g får man satsens formler

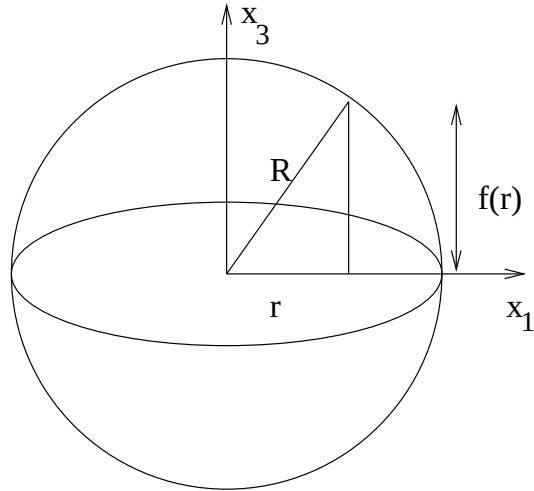
Exempel 11 En sfär kan uppfattas som en rotationsyta.

Sfären med centrum i origo och radien R kan uppfattas som en rotationsyta definierad av funktionen

$$f(r) = \pm \sqrt{R^2 - r^2}, \quad 0 \leq r \leq R$$

Parameterkurvorna är sfärens meridianer (ϕ konstant) och parallellcirkclar (r konstant). Man finner att

$$K = \frac{1}{R^2}.$$



Exempel 12 [Pseudofären] Den rotationsyta man får om man roterar släpcurvan kallas pseudofären.

Här har funktionen f alltså egenskapen

$$f'(r) = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}.$$

Vi får då att Gausskrökningen är

$$K = -\frac{1}{R^2}.$$

Det innebär att pseudosfären är en yta med konstant negativ krökning, (analogt med sfären som har konstant positiv krökning). Pseudosfären användes av Beltrami som modell för den hyperboliska geometrin.

