

1 Geometriska bilder av världen

I rubriken kan ordet "världen" stå för olika saker. Det kan betyda tavlan plan, jordklotet, universum, den materiella världen, en kemisk molekyl, Sveriges kustlinje osv.

Ordet "bild" skall uppfattas som synonymt med "beskrivning". En "geometrisk bild" är då en abstrakt beskrivning med hjälp av geometriska begrepp, t.ex. punkt, linje, triangel, vinkel, avstånd, area m.fl.

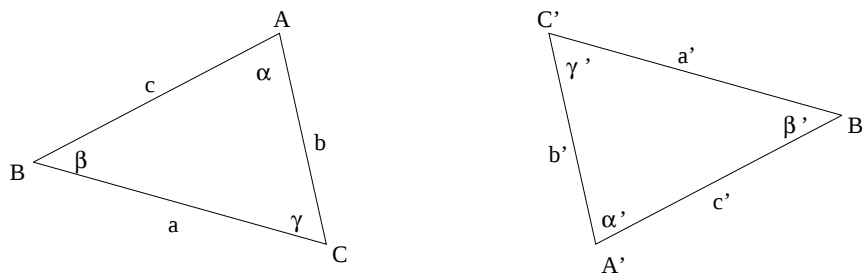
En och samma verklighet kan förstas beskrivas på många olika sätt, beroende på vad man vill framhäva. Det finns därför också olika geometriska beskrivningar, eller om man så vill, det finns *olika geometrier* för en och samma "värld". Euklides geometri är ett exempel på en geometrisk beskrivning av tavlans plan, men det finns andra (likformighetsgeometri, affin geometri). Dessutom finns olika geometrier för olika "världar".

Det är detta som dessa föreläsningar handlar om: olika geometrier, deras grundläggande särdrag och skillnader och i någon mån, deras historiska bakgrund.

Första kongruensfallet i Euklides geometri

Som en utgångspunkt för en senare diskussion om vad geometri är och förhållandet mellan geometri och verkligheten skall vi nu diskutera en grundläggande sats ur den Euklidiska geometrin, nämligen *det första kongruensfallet*.

Två trianglar är givna, den ena med hörn i punkterna A, B, C och den andra med hörn i A', B', C' . Sidorna som står mot hörnen B respektive B' är lika. Detsamma gäller sidorna som står mot hörnen C respektive C' . Dessutom är vinklarna vid A och A' lika. Då säger det första kongruensfallet att sidorna som står mot A respektive A' lika och att trianglarnas övriga vinklar lika.



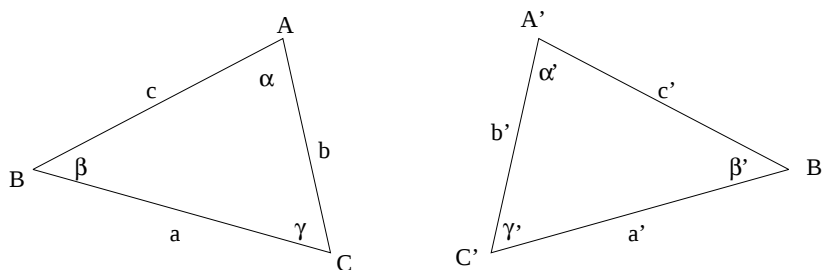
Förutsättningarna innebär alltså att $b = b', c = c', \alpha = \alpha'$.
Slutsatsen är att $a = a', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$.

I min gamla skolgeometri (Asperén, 1946, 19:de och (?) sista upplaga) gick beviset till ungefär så här.

Man (tänker sig att man) flyttar triangeln ABC , så att hörnet A sammanfaller med A' och så att sidan AB sammanfaller med $A'B'$ och så att sidan AC sammanfaller med $A'C'$. Detta är möjligt enligt förutsättningarna. Man ser då att sidan BC sammanfaller med $B'C'$, vilket visar satsen.

Detta argument förtjänar att begrundas. Huvudidén i beviset bygger på att man (åtminstone i fantasin) ”klipper ut” den ena triangeln och sedan flyttar den. Detta är väl snarast mekanik (läran om materiella kroppars rörelse). Man lånar alltså argument från ”den materiella världen”, och tar därvid för givet att om man väl lyckats flytta triangeln ABC så att den sammanfaller med $A'B'C'$, så måste sidan BC och $B'C'$ vara lika långa. Detta är emellertid bara fallet om ”världen” är platt. Om det så att säga skulle finnas en ”grop” som förbindelselinjen mellan B' och C' går ner i, så kan denna förbindelselinje mycket väl vara längre än sträckan BC .

Den tänkta förflyttningen av triangeln ABC kompliceras ytterligare av möjligheten att $A'B'C'$ kan vara spegelvänd. Man måste då lyfta upp triangeln ABC och vända den för att få den att sammanfalla med $A'B'C'$.



Det är nu uppenbart att ett bevis av första kongruensfallet inte kan grundas enbart på det argument som vi gav. Euklides försökte eliminera svårigheten genom att sätta upp axiom (självkla sanningar) ur vilka han sedan ville härleda andra resultat. Den axiomatiska idén har fullföljts på ett mera precist sätt av David Hilbert. Det finns också en annan möjlighet, nämligen att ersätta det intuitiva ”klipp och flytta”-argumentet med en strikt definition av vilka transformationer som är tillåtna. Denna tanke framfördes först av Felix Klein. Vi återkommer snart till detta!

Geometri och den materiella världen

I den materiella världen finns inga ”punkter”. Där måste ”läge” beskrivas genom referens till materia: detta rum, denna stol jag står intill. Kunde man ta bort all materia, skulle man inte kunna ange läge. I Einsteins allmänna relativitetsteori kröker materien rummet. Ljuset från avlägsna stjärnor böjs av solens massa.

Geometris grundbegrepp är inte materia, utan punkt. Därför måste geometri vara en abstrakt vetenskap. Den kan omöjligen beskriva hur världen verkligen ”är”. Däremot kan

geometri användas för att beskriva aspekter av världen. Hus och städer kan byggas med geometri. Olika geometrier kan ha olika fördelar och olika nackdelar i olika sammanhang, men det finns ingen geometri som i någon absolut mening är sannare än någon annan och avgjort inte geometri som är "sann".

Det finns, som jag redan sagt, två vägar att gå för att bygga upp geometri, utan referens till den materiella världen. Den ena är den axiomatiska vägen, som bland annat Euklides och Hilbert prövade. Man beskriver geometriska begrepp och deras mest grundläggande egenskaper med hjälp av självklara sanningar, axiom. Den andra vägen bygger på analytisk geometri, där geometriska begrepp och samband beskrivs med formler. En punkt anges exempelvis med sina koordinater. Grundbegreppens egenskaper härleds med hjälp av transformationer, exempelvis kongruenstransformationer, vilka också beskrivs med formler.

Bilden och det avbildade

Den belgiske konstnären René Magritte ställde 1928 ut en målning med en mycket realistiskt målad pipa (i överdrivet format 62×81 cm). Under pipan hade han målat texten "Ceci n'est pas une pipe". Det är franska och betyder: Detta är inte en pipa. Bilden lär ha väckt upprörda reaktioner. Man sa: "Det ser väl jag att det är en pipa". Men det var inte en pipa, utan en *bild av en pipa*! Det är ett vanligt misstag att man blandar ihop bilden med det avbildade!

Om man ser en kartbild av jordklotet, frestas man knappast att blanda ihop bilden med det avbildade. Det finns ändå anledning att ställa sig frågan: Vad kan man se på denna bild? Kan man se hur stort jordklotet är? Uppenbarligen inte! Kan man se hur stort Afrika är i förhållande till Sydamerika? Kan man mäta relativa avstånd? Svaren beror på hur bilden är gjord! Vad är det bilden vill lyfta fram? Ofta nog kan man inte se på en bild vad det är man kan se på bilden. Man måste veta hur bilden är gjord innan man kan avgöra vad man egentligen kan se!

På samma sätt som en bild är gjord för att lyfta fram vissa förhållanden, syfter olika geometrier till att lyfta fram olika aspekter av "världen". Likaväl som bilden inte skall sammanblandas med det avbildade, får en geometri inte förväxlas med verkligheten själv.

Det finns olika geometrier

Geometrin vill alltså ge en abstrakt beskrivning av "världen". Det är därför klart att man får olika slags geometrier beroende av vilken värld man vill beskriva. Vår närmiljö kan kanske beskrivas med hjälp av Euklides geometri, som förutsätter en platt värld. Men på jordklotet får vi en annan slags geometri. Där finns inga räta linjer. Däremot kan man tala om geodetiska linjer eller storcirklar, dvs cirklar med centrum i jordens medelpunkt. I den Euklidiska geometrin kan man intressera sig för parallella linjer. På jordklotet, däremot,

kommer två geodetiska linjer alltid att skära varandra. Det finns alltså inga parallella (geodetiska) linjer överhuvudtaget på jordklotet.

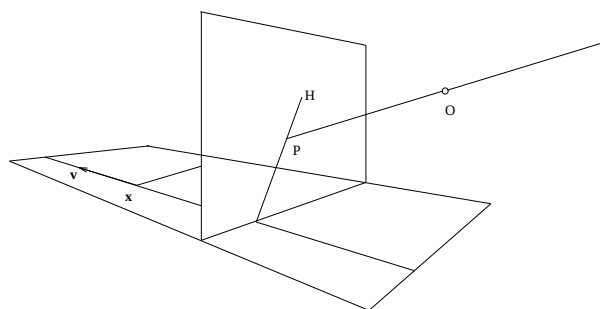
Innan jag fortsätter vill jag göra en viktig avgränsning. Vi skall enbart arbeta med *tvådimensionella geometrier*. Det är inte en nödvändig avgränsning utan ett praktiskt (eller bekvämt) val. I en analytisk modell av en tvådimensionell geometri kan punkter anges med två oberoende koordinater, så som exempelvis punkter på en sfär kan beskrivas med två tal, som anger longitud och latitud.

Olika geometrier ger olika beskrivningar av samma värld, genom att lyfta fram olika aspekter. Tag som exempel kartprojektioner. Tänk till en början på sjöfararen i gamla tider. Han navigerar över stora havsvidder med hjälp av himlakroppar. För att kunna göra det behöver han kartor som återger vinklar korrekt, är *konforma*, som termen lyder. Sjöfararen har däremot inte samma nytta av kartor som återger avstånd korrekt. Den tid hans resa tar är mer avhängig av väder och vind, än av avståndet till resmålet. Sjöfararen vill ha en bild av klotet som återger vinklar rätt!

Annorlunda är det för lantmätaren. Han vill ha en karta som anger relationen mellan areor korrekt, medan vinklar är av mera sekundär betydelse. Lantmätaren vill ha vad man brukar kalla en *ytriktig* karta.

Ordet "geometri", för övrigt, kommer av grekiskans ord för jord (geo) och mätning och betyder alltså ungefär lantmåteri.

Olika försök att beskriva världen har givit upphov till speciella geometrier. Under renässansen, på 1400-talet i Italien, utvecklade målare och arkitekter det s.k. *centralperspektivet*.



Ett öga placerades i en fix punkt. Framför ögat spändes duken upp. Från en punkt i motivet drogs en rät linje till ögat. Dess bild var då skärningspunkten mellan linjen och det plan som duken representerar. Idén om centralperspektivet exploaterades under renässansen och gav senare upphov till en särskild geometri, projektiv geometri.

Hur beskriver man en geometri?

Vi har redan omnämnt två i grunden olika metoder.

Den första är den *axiomatiska metoden*. Man utgår från en lista över odefinierade begrepp och grundläggande egenskaper (axiom) som beskriver samband mellan begreppen. Tillhörande geometri är då teorin om vad som logiskt kan härledas ur dessa axiom. Detta är den klassiska metoden som användes redan av Euklides. Vi skall senare ge en kortfattad beskrivning av Hilberts axiomsystem för den Euklidiska geometrin.

Den andra metoden kan beskrivas så här. Man utgår från en mängd (av punkter) och en grupp av transformationer. Tillhörande geometri är läran om vad som lämnas oförändrat, *invariant*, under varje transformation. Denna metod föreslogs av Felix Klein, 1872. Klein var då professor i den tyska staden Erlangen. Man talar därför om *Kleins Erlangenprogram*.

Både den axiomatiska metoden och Kleins Erlangenprogram innebär begränsningar vad gäller innebörden av ordet geometri. Detta ord användes nämligen i många mycket vidare betydelser. Man talar t.ex. om differentialgeometri, algebraisk geometri, fraktal geometri osv. I mina kommande översiktliga föreläsningar kommer jag att följa Kleins program, eftersom det ger möjligheter att diskutera och jämföra geometrier på ett översiktligt sätt och ändå kunna gå in i enskilda detaljer om man så önskar. Nackdelen med Kleins program är att man gör sig beroende av en viss teknisk apparatur i form av analytisk geometri.

Hilberts axiom för den Euklidiska geometrin

För att belysa den axiomatiska metoden skall jag först beskriva Hilberts axiomsystem för den Euklidiska, tvådimensionella geometrin. Jag nöjer mig med en mycket översiktlig och ofullständig beskrivning.

David Hilberts axiomsystem härrör från slutet av 1800-talet. Det arbetar med *odefinierade storheter*

punkt, linje

samt en rad odefinierade relationer

ligger på, går genom, mellan, kongruens, vara parallell med

Det finns fem grupper av axiom: tillhörighetsaxiom, ordningsaxiom, kongruensaxiom, parallellaxiomet, kontinuitetsaxiom. Vi ger här några exempel ur varje grupp.

Tillhörighetsaxiom

- *Genom två olika punkter går en entydigt bestämd linje.*
- *Varje par av olika punkter på en linje bestämmer linjen.*
- *På varje linje finns minst två olika punkter.*
- *Det finns tre punkter som inte ligger på en linje.*

Ordningsaxiom

- *Om A, B, C är tre punkter på en linje och B ligger mellan A och C så ligger B också mellan C och A .*
- *Om A och C är två punkter på en linje så finns det minst en punkt B på linjen så att B ligger mellan A och C . Det finns också en punkt D på linjen så att C ligger mellan A och D .*
- *Av tre punkter på en linje ligger alltid precis en punkt mellan de båda övriga.*

(totalt 4 axiomer)

Kongruensaxiomer

Med hjälp av ordningsaxiomen kan man definiera vad som menas med sträckan AB mellan två punkter A och B . Denna sträcka består av alla C på linjen genom A och B , vilka ligger mellan A och B . Man kan också definiera begrepp som triangel, vinkel m.fl. Därefter formuleras kongruensaxiomen t.ex.

- Om A och B är två punkter på en linje ℓ och A' en punkt på en linje ℓ' , så finns på en given sida om A' på linje ℓ' , en punkt B' så att $A'B'$ är kongruent med AB (eller BA).
- Om AB är kongruent med både $A'B'$ och $A''B''$, så är $A'B'$ kongruent med $A''B''$.
- Antag att AB och BC är två sträckor på en linje och att dessa sträckor endast har punkten B gemensamt. Antag att $A'B'$ och $B'C'$ är två sträckor på en annan linje med endast punkten B' gemensamt. Om då AB är kongruent med $A'B'$ och BC är kongruent med $B'C'$ så är AC kongruent med $A'C'$.

(6 axiomer, det sjätte är första kongruensfallet)

Parallellaxiomet

- Genom en punkt som inte ligger på en given linje, går en och endast en linje som är parallell med den givna linjen.

Kontinuitetsaxiomet

- Låt A och B vara olika punkter på en linje ℓ och A_1 , en godtycklig punkt mellan A och B . Antag att $A_1, A_2, A_3, \dots$ är en följd av punkter på ℓ , så att A_1 ligger mellan A och A_2 , A_2 ligger mellan A_1 och A_3 etc och att segmenten $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ osv alla är kongruenta. Då finns ett tal n så att B ligger mellan A och A_n .

Detta axiom kallas det *Arkimediska axiomet*. Det finns ett andra kontinuitetsaxiomet, *fullständighetsaxiomet*, som man kan undvara, men som gör det möjligt att identifiera varje linje med mängden av reella tal. Detta i sin tur gör det möjligt att bygga upp analytisk geometri från Hilberts axiomer.

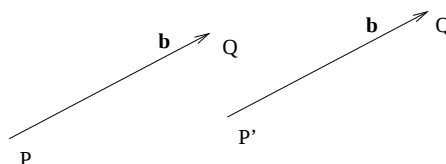
Euklides geometri enligt Kleins Erlangenprogram

Vi begränsar oss även här till Euklides tvådimensionella geometri. Först skall vi specificera den mängd vars element skall representera geometrins punkter. Vi väljer då mängden $\mathbb{R}^2$. Nästa steg blir att specificera *transformationsgrupp*. När det gäller den Euklidiska geometrin är det naturliga valet gruppen av s.k. *kongruensavbildningar*. Man kan definiera detta begrepp genom att skriva ut en formel för hur en generell kongruensavbildning ser ut. Man kan också (och det säger kanske mer än en formel) beskriva hur transformationsgruppen är uppbyggd.

En kongruensavbildning kan skrivas som en sammansättning av en eller flera av tre elementära avbildningar, nämligen *translation* (parallellförflyttning), *rotation* kring en valfri

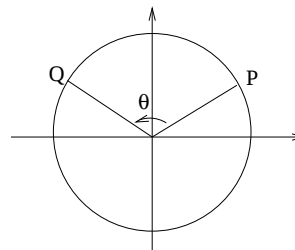
punkt och *spegling* i en valfri linje.

En translation är en avbildning av formen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$, där $\mathbf{b}$ är en fix vektor. Innebörden är att om P har koordinatvektorn $\mathbf{x}$, så har dess bild Q koordinatvektorn $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Translation innebär alltså en parallellförflyttning av alla punkter en viss sträcka i en viss riktning.



Rotation kring en given punkt kan beskrivas som sammansättning av en translation och *rotation kring origo*.

Rotation med vinkeln θ i positiv orientering kan lätt beskrivas analytiskt. Vi skall göra det längre fram. Här nöjer vi oss med en illustrerande figur!



Även spegling i en linje kan beskrivas analytiskt. Vi avstår från detaljerna här.

En kongruensavbildning är alltså en sammansättning mellan ett ändligt antal translationer, rotationer och speglingar. En modell för den Euklidiska plana (tvådimensionella) geometrin ges nu av punktmängden $\mathbb{R}^2$ försedd med transformationsgruppen av alla kongruensavbildningar. Euklides plana geometri är således läran om sådana objekt som är *invarianta* (oförändrade) under alla kongruensavbildningar. Enligt detta synsätt finns inga odefinierade objekt eller odefinierade relationer. Allt måste istället definieras och alla utsagor måste bevisas, även sådana som kallas axiom i en axiomatisk beskrivning av geometrin. Som grund för den Euklidiska geometrin ligger istället egenskaper hos de reella (eller i grunden de naturliga) talen.

Om man följer Kleins program måste man således definiera begrepp som linje, att en punkt ligger på en linje, att en punkt ligger mellan två andra eller att två linjer är parallella. Man måste definiera vad som menas med vinkeln mellan två linjer, avståndet mellan två punkter osv. Dessutom, och det är viktigt, måste man säkerställa att de objekt och relationer man definierar tillhör geometrin ifråga, dvs att de är invarianta under den valda transformationsgruppen. Här måste man till exempel visa att

- en kongruensavbildning avbildar en linje på en linje,
(begreppet linje är invariant)
- en kongruensavbildning avbildar parallella linjer på parallella linjer,
(begreppet parallell är invariant)
- vinkeln mellan två linjer är densamma som vinkeln mellan bilderna av dessa linjer under en godtycklig kongruensavbildning,
(begreppet vinkel är invariant)
- avståndet mellan två punkter är detsamma som avståndet mellan bilderna under en godtycklig kongruensavbildning,
(begreppet avstånd mellan punkter är invariant)

Definitioner och bevis genomförs med hjälp av analytiska verktyg (t.ex. skalärprodukt, avståndsformler m.m.) och med hjälp av linjär algebra (t.ex. matriser). Ett bevis av första kongruensfallet går till exempel till så att man konstruerar en kongruensavbildning som avbildar A på A' , B på B' och visar att denna avbildning avbildar C på C' . Eftersom kongruensavbildningar lämnar vinklar och avstånd invarianta följer slutsatsen i första kongruensfallet. Ett sådant bevis blir mycket likt det bevis som jag hämtade ur min gamla skolgeometri. Skillnaden ligger i att man inte hänvisar till något mekaniskt argument eller något "intuitivt". Detta kan uppfattas både som en fördel och som en nackdel. Fördelen är förstås att man inte riskerar att utnyttja något som är oredovisat.

Intuition är inte något som matematiker misstror. Tvärtom, det är omöjligt att komma någonstans i sitt tänkande, vad det än gäller, utan att använda alla möjliga informella metoder. Men olika människors intuition och känslor kan se mycket olika ut. Naturvetenskapernas strävan är att finna samband, (naturlagar, invarianta tillstånd), som är oberoende av observatören. Av liknande skäl vill matematikern undvika oredovisade antaganden när han beskriver sina resultat. Det hindrar dock inte matematikern att använda alla medel på vägen dit.

Geometri på jordklotet

En geometri på jordklotet måste lyfta fram vissa aspekter av förhållandena på Tellus. En geometri som vill beskriva lufthavets rörelse måste exempelvis vara tredimensionell. En geometri som vill beskriva sönderbrutna system av öar måste kanske vara annorlunda än en geometri, som vill lyfta fram sådana förhållanden som är viktiga för navigation över öppna vatten.

Låt oss skissera hur man kan bygga upp den traditionella geometrin på jordklotet med hjälp av Kleins Erlagenprogram. Vi börjar då med en analytisk modell av jordklotet. Det blir enklast om vi antar att jordklotet är en sfär. Vi placerar sfären i $\mathbb{R}^3$ och låter dess medelpunkt ligga i origo. Låt oss dessutom välja måttenheten för längd så att sfärens radie blir 1. Vår analytiska modell av jordklotet grundar sig då på mängden

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

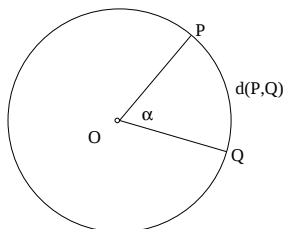
Taltripplarna $\mathbf{x}$ i $\mathbb{S}$ är den sfäriska geometris punkter.

Vilka transformationer skall vi tillåta. Om vi är intresserade av vinklar, sträckor och areor bör vi inskränka oss till dessa transformationer som lämnar sådana storheter invarianta, som till exempel *rotationer*. Även speglingar av sfären i ett plan genom origo kan tillåtas. Vi kan t.ex. vara intresserade av att jämföra ett område på norra halvklotet med motsvarande område på södra halvklotet. Den enklaste transformationsgruppen med dessa egenskaper består av alla *isometriska avbildning* $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Eftersom sådana bevarar avstånd i $\mathbb{R}^3$

kommer varje punkt på $\mathbb{S}$ att avbildas i en punkt på $\mathbb{S}$. Vi låter med andra ord vår transformationsgrupp bestå av alla $T : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, där T ges av formeln $T(P) = U(\mathbf{x})$, om $P = \mathbf{x} \in \mathbb{S}$ för någon isometrisk avbildning U .

När vi väl har beskrivit vår punktmängd $\mathbb{S}$ och våra transformationer så har vi definierat en tillhörande geometri. Den är läran om alla de objekt och relationer som är invarianta under alla de givna transformationerna.

Låt oss ta några få steg i uppbyggnaden av denna sfäriska geometri. Först börjar vi med att definiera *avstånd* mellan två punkter P och Q på $\mathbb{S}$.



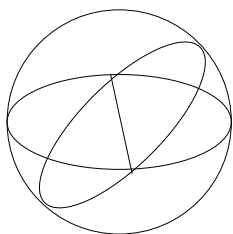
Bilda ett plan genom origo som innehåller P och Q . Om P och Q inte ligger på en diameter så är detta plan entydigt bestämt. Planets snitt med $\mathbb{S}$ kommer att vara en cirkel. Det är naturligt att definiera avståndet d mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ som längden av den kortaste cirkelbågen mellan dem.

Eftersom vi har valt sfärens radie till 1 kommer d att vara detsamma som vinkeln mellan vektorerna P och Q , $d(P, Q) = \alpha$ i figuren.

Rotationer och speglingar ändrar inte vinklar. Därför kommer våra transformationer att lämna det just definierade avståndet invariant.

Hur skall vi definiera *linje* på sfären $\mathbb{S}$. I den Euklidiska geometrin bestämmer två punkter en linje. På sfären bestämmer två punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i stället en cirkel, nämligen den cirkel som skärs ut av $\mathbb{S}$ ur planet genom origo, $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. (Vi antar att punkterna inte ligger på en gemensam diameter!) Sådana cirklar kallas *storcirklar* och dessa får bli motsvarigheten till den Euklidiska geometris linjer. Storcirklar kallas ofta *geodetiska linjer*. Det är klart att våra transformationer avbildar geodetiska linjer på geodetiska linjer, så geodetiska linjer är också invariant.

I denna översikt stannar vi här. En fortsättning av den sfäriska geometrin skulle innehålla definition av vinkel mellan geodetiska linjer, definition av sfärisk triangel, definition av area, satser om sfäriska trianglar. (Hur tror ni Pythagoras sats ser ut? Vad är vinkelsumman i en sfärisk triangel?) Allt detta får anstå till längre fram. En sak kan vi emellertid redan konstatera. Den sfäriska geometrin skiljer sig på flera avgörande punkter från den Euklidiska plana geometrin.

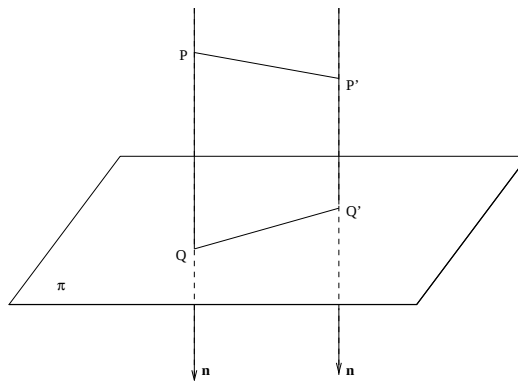


En sådan punkt är att *parallellaxiomet inte gäller på sfären*. Tag nämligen två (geodetiska) linjer. Dessa skärs ut av två plan genom origo. Två plan genom origo skär varandra utefter en rät linje i $\mathbb{R}^3$ genom origo. På denna linje ligger två punkter på sfären. Alltså skär två olika linjer varandra i precis två punkter. Således det finns inga parallella (geodetiska) linjer på sfären.

Projektioner

Ordet projektion är ett av de mest frekventa orden i geometriska sammanhang. Låt oss i tre figurer beskriva tre vanliga projektioner av punkterna i $\mathbb{R}^3$ på ett plan π i $\mathbb{R}^3$. Vi börjar med *ortogonal projektion*. Givet en punkt P kan vi genom P dra en linje, som är parallell med planets normal. Denna linje träffar planet i en punkt Q , den ortogonala projektionen av P .

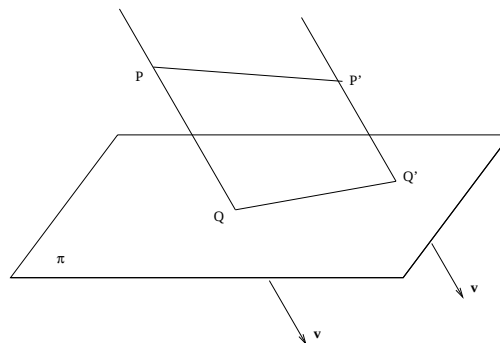
I figuren är $\mathbf{n}$ planets normal och punkterna Q och Q' är de ortogonala projektionerna av P respektive P' . Observera att linjestycket mellan P och P' avbildas på linjestycket mellan Q och Q' . Notera också att om man väljer en godtycklig punkt på linjen genom P och Q så kommer denna punkts ortogonala projektion att sammanfalla med Q . Alla punkter på linjen genom P och Q har alltså samma ortogonala projektion.



En generellare typ av projektion är *parallellprojektion* i en given riktning $\mathbf{v}$. Givet en punkt P så kan vi genom P dra en linje med riktningsvektorn $\mathbf{v}$. Om då $\mathbf{v}$ inte är parallell med det givna planet π , så kommer denna linje att träffa planet i en punkt Q , parallellprojektionen av P .

Även vid parallellprojektion kommer linjestycket mellan två punkter P och P' att avbildas på linjestycket mellan deras projektionspunkter Q och Q' . Det är också så att alla punkter på linjen genom P och dess projektionspunkt kommer att ha samma bild, nämligen just punkten Q .

Observera att ortogonal projektion är ett specialfall av parallellprojektion. Tag nämligen $\mathbf{v} = \mathbf{n} =$ planets normal!

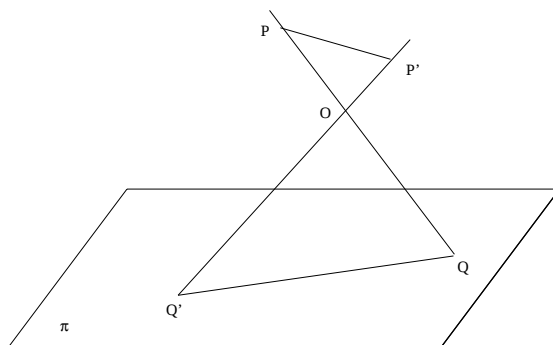


Den tredje projektionen är *centralprojektion*. Man ger då ett projektionscentrum O samt ett plan π , som inte går genom O . Genom en given punkt P dras linjen genom projektionscentrum O .

Om P inte ligger i det plan genom origo som är parallellt med π , kommer denna linje att träffa π i en punkt Q , centralprojektionen av P .

Återigen kommer alla punkter på linjen genom P och dess projektionspunkt Q att projiceras på samma punkt och linjestycket mellan två punkter kommer att avbildas på linjestycket mellan projektionspunkterna.

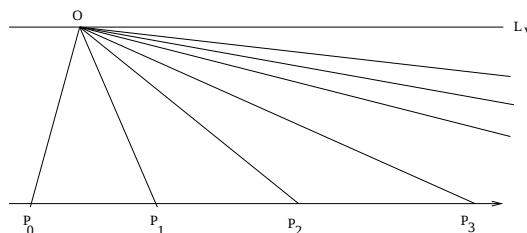
Parallellprojektion kan uppfattas som centralprojektion från ett oändligt avlägset projektionscentrum beläget i projektionsriktningen.



Projektiv geometri, en kort introduktion

Under 1400-talet utvecklades centralperspektivet i konsten som en metod att skapa större rumsverkan i bilderna. I början av 1400-talet skrev arkitekten Alberti boken *Della pittura* (om måleriet), i vilken centralperspektivet beskrivs. Senare på 1400-talet skrev målaren Piero della Francesca boken *De Prospectiva pingendi* (Om perspektivet i måleriet).

Vid centralprojektion kommer alla punkter på en linje genom projektionscentrum att avbildas på en och samma punkt. Man kan alltså identifiera (sätta likhetstecken mellan) projektionspunkt och linje genom projektionscentrum. Varje projektionspunkt svarar mot en linje genom projektionscentrum. Den projektiva geometrins ”punkter” är just linjer genom en fix punkt, låt oss säga origo. Varje linje genom origo som inte är parallellt med projektionsplanet svarar mot en punkt där. Linjer som är parallella med projektionsplanet saknar skärningspunkt med detta plan. Man kan emellertid se sådana linjer som gränslägen av linjer som skär projektionsplanet.



Låt $P_0, P_1, P_2, \dots$ vara en följd av punkter i projektionsplanet π och antag att alla ligger på linjen genom P_0 med riktningsvektorn $\mathbf{v}$. Antag mer exakt att $\vec{OP}_n = \vec{OP}_0 + t_n \mathbf{v}$ där $t_n \rightarrow \infty$. Då kommer linje genom O och P_n att närma sig den linje $L_{\mathbf{v}}$ genom origo vars riktningsvektor är $\mathbf{v}$, samtidigt som punkterna P_n så att säga ”går mot oändligheten i riktningen $\mathbf{v}$ ”. Observera att $\mathbf{v}$ är parallell med projektionsplanet π , så $L_{\mathbf{v}}$ skär inte π . Vi kan då låta linjen $L_{\mathbf{v}}$ representera ”punkten i oändligheten i riktningen $\mathbf{v}$ ”. Det *projektiva planet* $\mathbb{P}_2$ får nu bestå av alla linjer genom O . De linjer som inte är parallella med projektionsplanet π representerar ”vanliga” punkter (nämligen skärningspunkten) medan de linjer som är parallella med π , representerar ”punkter i oändligheten”.

För att karakterisera den projektiva geometrin behöver vi nu bara komplettera med en beskrivning av tillhörande transformationsgrupp. Denna är enkel att beskriva. Låt nämligen $\mathbf{A}$ vara en godtycklig omvändbart entydig linjär avbildning på $\mathbb{R}^3$. Varje linje genom origo kommer att avbildas av $\mathbf{A}$ på en linje genom origo. Eftersom linjer genom origo är det projektiva planets punkter, kommer $\mathbf{A}$ att avbilda projektiva punkter på projektiva punkter. Som transformationsgrupp kan vi därför ta alla omvändbart entydiga linjära avbildningar på $\mathbb{R}^3$.

En projektiv punkt är alltså en linje genom origo. Vad är då en projektiv linje? I den Euklidiska geometrin bestämmer två olika punkter en linje. På samma sätt bestämmer

två olika linjer genom origo (dvs två projektiva punkter) ett plan genom origo. Det är därför naturligt att definiera en projektiv linje som ett plan genom origo. Eftersom varje omvändbart entydig linjär avbildning avbildar ett plan genom origo på ett plan genom origo, kommer projektiva linjer att avbildas på projektiva linjer av varje avbildning i vår transformationsgrupp. Begreppet projektiv linje är alltså invariant och ingår därmed i den projektiva geometrin.

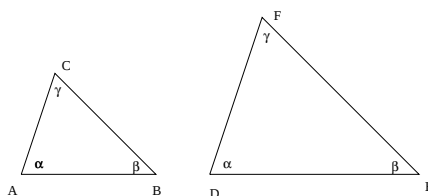
Parallellaxiomets historia (en ansats)

Startpunkten för den projektiva geometrin är centralperspektiviska konstruktioner. Andra geometrier har en annorlunda tillkomst. I den Euklidiska geometrin tilldrog sig parallellaxiomet en särskild uppmärksamhet. Så här lyder detta axiom

P1: *Genom en punkt som inte ligger på en given linje går en och endast en linje som är parallell med den givna linjen.*

Man kan visa att parallellaxiomet P1 är ekvivalent med följande postulat (Wallis, 1600-talets mitt).

W: *Givet en godtycklig triangel ABC och en sträcka DE så finns en triangel DEF som är likformig med ABC.*



Parallellaxiomet är alltså ekvivalent med existensen av likformiga trianglar av olika storlek. Man kan säga att parallellaxiomet innebär att det är möjligt att bygga skalenliga modeller, något som man kanske kan tro är självklart. Detta kan vara förklaringen till alla de många försök som gjorts genom tiderna att bevisa P1 med hjälp av övriga axiom.

Under 1700-talet försökte en matematiker vid namn Saccheri att bevisa parallellaxiomet genom att ersätta P1 med endera av följande alternativ:

P2: *Givet en linje L och en punkt Q utanför L så går genom Q minst två linjer som inte skär L.*

P0: *Givet L och Q som i P2 så finns ingen linje genom Q som inte skär L.*

Saccheri visade att P0 stod i strid mot ett av Euklides axiom, nämligen det som säger att varje linje kan fortsättas hur långt som helst. Sedan försökte han visa att även P2 stod i strid mot Euklides axiom, (med undantag av P1 förstås). Detta lyckades han inte med. Skälet är

att det inte finns någon sådan motsägelse. Innemot hundra år senare visade Lobachevsky och Bolyai att det existerar geometrier i vilka P2 gäller, s.k. *hyperbolisk geometri*.

Gauss konstruerade förmodligen en egen variant av den hyperboliska geometrin, men han publicerade den aldrig. Han talar om sin icke-Euklidiska geometri i ett brev (1824) där han i fri översättning säger:

“Alla mina försök att finna en motsägelse i denna icke-Euklidiska geometri har misslyckats och den enda sak som strider mot våra föreställningar är att om den vore sann, så måste det i rummet finnas ett absolut mått, (okänt för oss). Men det förefaller mig, vad de allvetande metafysikerna än må säga, att vi vet för lite eller nästan ingenting alls, för att kunna påstå att det vi finner onaturligt är absolut omöjligt.”

Metafysikerna som Gauss ger en gliring åt är Immanuel Kant och dennes efterföljare. Gauss upptäckt stod i konflikt med Kants läror. Kant ansåg att Euklides geometri var inbyggd i våra sinnen och att ”vårt [Euklidiska] rumsbegrepp ingalunda har empirisk ursprung utan är nödvändigt för vårt tänkande”. I ett avseende har dock Gauss och Kant en gemensam utgångspunkt, nämligen föreställningen att det finns en sann geometri, den materiella världens geometri.

Det finns ett samband mellan den hyperboliska geometrin och *Einsteins relativitesteori*, i vilken han försöker beskriva rörelse på ett sätt som är förenligt med observationen att ljuset har en konstant hastighet. Man kan jämföra detta med Gauss kommentar om existensen av ett absolut mått.

Geometri i allmän betydelse

I matematik används ord ofta med olika nivåer av precision och med olika innebörd i olika sammanhang. Detta gäller i hög grad för ordet geometri. Hittills har vi talat om geometri som en matematisk disciplin med olika specialområden (Euklidisk geometri, projektiv geometri, hyperbolisk geometri osv), vilka alla kan beskrivas på ett enhetligt sätt (axiomatiskt eller enligt Kleins Erlangenprogram). Ordet geometri kan emellertid förekomma med många andra bestämningar. Som exempel kan vi ta *differentialgeometri*, som vill beskriva ytor med hjälp av differentialkalkyl. Varken en beskrivning enligt Kleins program eller en axiomatisk beskrivning är så naturlig här. Ett annat exempel är *fraktal geometri*, som användes i mycket vid mening för att beskriva sönderbrutna kurvor och former.