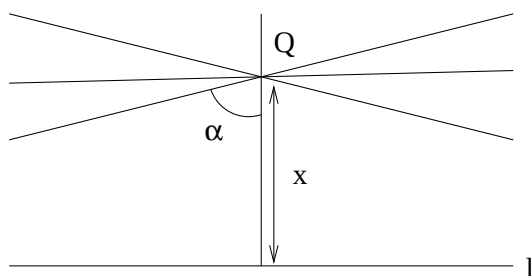


6 Hyperbolisk geometri

Under lång tid försökte matematiker bevisa parallellaxiomet. Ett av försöken gjordes av Saccheri som försökte visa att antagandet att parallellaxiomet *inte* gällde måste leda till en motsägelse. Han lyckades emellertid inte! Under början av 1800-talet utvecklades istället en geometrisk teori i vilket parallellaxiomet inte var uppfyllt. Tre matematiker är förknippade med denna utveckling, Gauss, ryssen Lobachevsky och ungraren János Bolyai. De två senare publicerade oberoende av varandra sina arbeten omkring 1830, men deras resultat observerades inte förrän efter Gauss död, då man fick ta del av dennes korrespondens i ämnet.

Lobachevsky bevisade bland annat den berömda *parallellvinkelsatsen*. Givet en linje ℓ och en punkt Q på avståndet x från ℓ . Då finns en vinkel α (parallellvinkeln), sådan att en linje genom Q , vars vinkel mot normalen är $\geq \alpha$ men $\leq \pi/2$, inte skär linjen ℓ . För denna vinkel α gäller formeln

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-x}$$

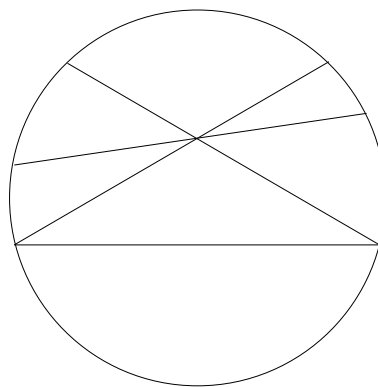


Osäkerheten om den nya teorin var stor. Det kunde ju dölja sig en motsägelse i antagandet att parallellaxiomet var falskt. (Det var ju just det Saccheri hade hoppats på!) Det dröjde till senare hälften av 1800-talet tills man kunde bevisa att den icke-euklidiska (hyperboliska) geometrin var fri från motsägelser. Detta skedde genom att man med hjälp av Euklidisk geometri satte upp en modeller för den hyperboliska geometrin (ungefär som geometrin på sfären definieras med hjälp av Euklidisk geomtri). Den första modellen gjordes av Beltrami. Han fann en rotationsyta vars Euklidiska geometri överensstämde med den hyperboliska. Det var den så kallade *pseudosfären*. En bild på pseudosfären finns längre fram i kapitlet om differentialgeometri.)

Något senare fann Klein en enklare modell som brukar kallas Cayley-Kleins modell. Modellens punktmängd är enhetsskivan

$$x^2 + y^2 < 1$$

i $\mathbb{R}^2$. Linjer representeras av snitt mellan Euklidiska linjer och enhetsskivan. Det är då genast klart att parallellaxiomet inte gäller.

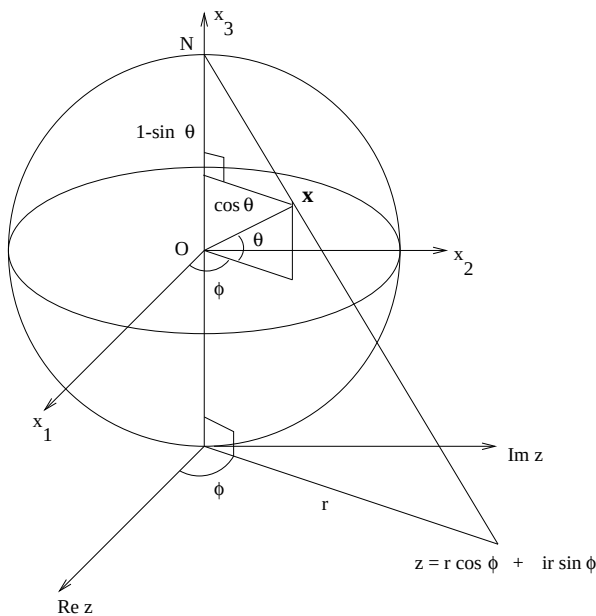


För att enhetsskivan skall fungera som en geometrimodell krävs emellertid att man beskriver vilken transformationsgrupp man skall ha. Man valde då gruppen av alla projektiva avbildningar som avbildar enhetsskivan på sig själv. Eftersom projektiva avbildningar av-

bildar linjer på linjer kommer modellens linjer att vara invarianta. Det krävs emellertid mycket mer. Man måste definiera mått på vinklar och avstånd. Här blir Cayley-Kleins modell ganska komplicerad. Vi avstår därför från att utveckla denna modell. Istället skall vi ge en enklare modell av Poincaré. Den baserar sig på det utvidgade komplexa talplanet.

Det utvidgade komplexa planet $\hat{\mathbb{C}}$

I samband med vår behandling av kartprojektioner, diskuterade vi bland annat *stereografisk projektion*. Vi visade att denna projektion är vinkeltrogen eller *konform*. Med hjälp av stereografisk projektion kan varje punkt (med ett undantag) på en sfär avbildas på en entydigt bestämd punkt i ett plan som tangerar sfären. För konkretionens skull tänker vi oss att sfären har centrum i origo och radien 1 och vi låter projektionsplanet tangera sfären vid sydpolen $S = (0, 0, -1)$. Vi kan identifiera projektionsplanet med det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ (istället för $\mathbb{R}^2$ som tidigare).



Givet en punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ på sfären drar vi en linje genom $\mathbf{x}$ och nordpolen $N = (0, 0, 1)$. Om $\mathbf{x} \neq N$ är denna linje entydigt bestämd och träffar projektionsplanet i en bestämd punkt $z = x + iy$, vilket är bilden av $\mathbf{x}$ under centralprojektion.

I figuren är

$$\mathbf{x} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

Förhållandet mellan r och sfärens diameter (alltså 2) lika med förhållandet mellan $\cos \theta$ och $1 - \sin \theta$. Det betyder att

$$r = \frac{2 \cos \theta}{1 - \sin \theta}.$$

Vi har alltså att $z = x + iy$ där

$$(1) \quad \begin{cases} x = r \cos \phi = \frac{2 \cos \theta \cos \phi}{1 - \sin \theta} = \frac{2x_1}{1 - x_3} \\ y = r \sin \phi = \frac{2 \cos \theta \sin \phi}{1 - \sin \theta} = \frac{2x_2}{1 - x_3} \end{cases}$$

eller ekvivalent

$$(2) \quad x_1 = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \quad x_2 = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4}$$

Den enda punkt på sfären som saknar bild i komplexa talplanet är nordpolen N , (där $x_3 = 1$). Vi utvidgar nu det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ med en tänkt bild av nordpolen. Bilden kallas oändlighetspunkten och betecknas ∞ . Det utvidgade komplexa planet skrivs $\hat{\mathbb{C}}$. Man kan, om man vill, säga att $\hat{\mathbb{C}}$ "är" sfären, inklusive nordpolen, som då "är" oändlighetspunkten. Det är emellertid fördelaktigt att tänka på $\hat{\mathbb{C}}$ som en utvidgning av komplexa talplanet, eftersom det då faller sig naturligt att använda sig av de komplexa talens aritmetik. Man kan även utvidga denna aritmetik med hjälp av följande definitioner:

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a = \infty && \text{om } a \in \mathbb{C} \\ a \cdot \infty &= \infty \cdot a = \infty && \text{om } a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \\ \infty + \infty &= \infty, \infty \cdot \infty = \infty \\ a/\infty &= 0 && \text{om } a \in \mathbb{C}, a \neq \infty \\ a/0 &= \infty && \text{om } a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \\ \bar{\infty} &= \infty \end{aligned}$$

Med hjälp av dessa definitioner kan vi utsträcka definitionsområdet för alla likformighetsavbildningar till $\hat{\mathbb{C}}$. En likformighetsavbildning har formen

$$z \mapsto az + b \quad \text{eller} \quad z \mapsto a\bar{z} + b, \quad (a \neq 0).$$

Varje sådan transformation avbildar ∞ på ∞ .

Cirklar och linjer i $\hat{\mathbb{C}}$

Stereografisk projektion etablerar nu ett en-entydigt samband mellan sfären $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (den s.k. *Riemann-sfären*) och det utvidgade komplexa talplanet $\hat{\mathbb{C}}$. Nordpolen svarar mot oändlighetspunkten medan övriga punkter på Riemannsfären svarar mot vanliga komplexa tal $z = x + iy$.

En cirkel Γ på Riemannsfären är snittet mellan sfären och ett plan $\pi : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$. Om man utnyttjar sambanden (1) och (2) mellan x_1, x_2, x_3 och bildpunktens koordinater får man att bilden av Γ i $\mathbb{C}$ har ekvationen

$$(3) \quad (c + d)(x^2 + y^2) + 4ax + 4by = 4(c - d).$$

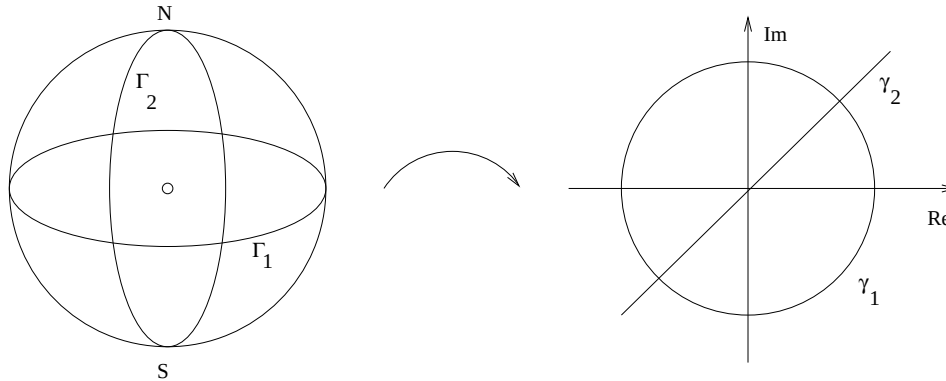
Om $c + d \neq 0$ är detta ekvationen för en cirkel i $\mathbb{C}$. Om däremot $c + d = 0$ är (3) ekvationen för en rät linje. Observera att $c + d = 0$ är ekvivalent med att planet π går genom nordpolen $(0, 0, 1)$. En cirkel Γ på Riemannsfären svarar alltså mot en cirkel i $\mathbb{C}$ om Γ inte går genom nordpolen, och mot en linje ifall Γ passerar genom nordpolen. Det är därför naturligt att göra följande definition.

Definition 1 En (generaliserad) cirkel γ i $\hat{\mathbb{C}}$ är antingen en cirkel eller en rät linje. Om γ är en rät linje kallas γ en (generaliserad) cirkel genom ∞ .

Observera följande samband mellan en cirkel Γ på Riemannsfären och dess bild γ på $\hat{\mathbb{C}}$.

Γ går genom nordpolen om och endast om γ går genom ∞ .

Γ går genom sydpolen om och endast om γ går genom 0.



(Parallellcirklar på Riemannsfären svarar mot cirklar med centrum i origo, med meridianerna svarar mot linjer genom origo.)

Vinkeln mellan två (generaliserade) cirklar definieras som (den Euklidiska) vinkeln mellan tangenterna i skärningspunkterna. Eftersom stereografisk projektion är en konform avbildning är vinkeln mellan två cirklar i $\hat{\mathbb{C}}$ densamma som vinkeln mellan motsvarande cirklar på Riemannsfären.

Inversion i enhetscirkeln

Här skall vi definiera en ny transformation på $\hat{\mathbb{C}}$. Vi börjar med att betrakta *spegling* i x_1 -axeln på Riemannsfären. Analytiskt definieras den av formeln $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3)$. Motsvarande transformation på $\hat{\mathbb{C}}$ kallas en *inversion*.

Uttryckt i de polära koordinaterna ϕ och θ innebär spegling i x_1 -axeln att $\phi \mapsto -\phi$, $\theta \mapsto -\theta$. Översatt till komplexa talplanet innebär detta att

$$x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi) = re^{i\phi}, \quad r = \frac{2 \cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

transformeras till

$$\rho(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)) = \rho e^{-i\phi}, \quad \rho = \frac{2 \cos(-\theta)}{1 - \sin(-\theta)}.$$

Eftersom

$$\rho = 2 \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = 2 \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = 2 \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

har vi att

$$\rho = \frac{4}{r}.$$

Det betyder att spegling i x_1 -axeln svarar mot avbildningen

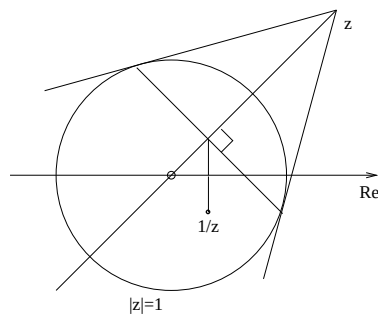
$$re^{i\phi} \mapsto \frac{4}{r} e^{-i\phi} = \frac{4}{re^{i\phi}}$$

dvs mot avbildningen $z \mapsto 4/z$.

Definition 2 *Inversion* i enhetscirkeln i $\hat{\mathbb{C}}$ är avbildningen

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Denna avbildning avbildar 0 på ∞ och ∞ på 0.



Sats 1 *Inversion i enhetscirkeln är konform och avbildar generaliserade cirklar på generaliserade cirklar. Närmare bestämt gäller att*

- en linje genom origo avbildas på en linje genom origo*
- en linje som inte går genom origo avbildas på en cirkel genom origo*
- en cirkel genom origo avbildas på en linje som inte går genom origo*
- en cirkel som inte går genom origo avbildas på en cirkel som inte går genom origo*

Bevis: Vi har sett att avbildningen $z \mapsto 4/z$ svarar mot spegling i x_1 -axeln på Riemannsfären. Detta är en konform avbildning på Riemannsfären. Eftersom stereografisk projektion också är konform följer det att avbildningen $z \mapsto 4/z$ är konform. Detta medför i sin tur att även $z \mapsto 1/z$ är konform. Vidare observerar vi att spegling i x_1 -axeln avbildar varje cirkel på Riemannsfären på en cirkel. Eftersom cirklar på sfären svarar mot generaliserade cirklar i $\hat{\mathbb{C}}$, följer det att avbildningen $z \mapsto 4/z$ avbildar generaliserade cirklar på generaliserade cirklar. Samma sak gäller då för avbildningen $z \mapsto 1/z$. Återstoden av satsen följer sedan direkt om man bara observerar att $0 \mapsto \infty$ och $\infty \mapsto 0$. $\square$

Definition av hyperbolisk geometri

Låt H vara det så kallade *övre halvplanet* i $\mathbb{C}$, dvs

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

Vi betraktar nu fyra typer av avbildningar

$$T_b : z \mapsto z + b, \quad b \text{ reellt}$$

$$\Delta_a : z \mapsto az, \quad a \text{ reellt}, a > 0$$

$$I : z \mapsto -\frac{1}{z}$$

$$S : z \mapsto -\bar{z}$$

Alla dessa avbildningar avbildar H på sig själv. Det är lätt att se när det gäller T_b och Δ_a . Vi lämnar detaljerna till läsaren. För att visa att I avbildar H på sig själv observerar vi att om $z = x + iy$ så är

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x + iy} = -\frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Därför är

$$\operatorname{Im} \left(-\frac{1}{z} \right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|^2}.$$

Om $z \in H$ (dvs $\operatorname{Im}(z) > 0$) så gäller $\operatorname{Im}(-1/z) > 0$ dvs $-1/z \in H$.

Att S avbildar H på sig själv följer genast av att S innebär spegling i y -axeln.

Samtliga avbildningar på listan lämnar också vinklar mellan generaliserade cirkelar invarianta. Detta är ingen nyhet vad gäller avbildningarna T_b och Δ_a (eftersom dessa är likformighetsavbildningar). För avbildningen I hänvisar vi till satsen ovan. När det gäller S är vinkeltröheten uppenbar eftersom S är en spegling.

Definition 3 En *hyperbolisk transformation* är sammansättning av en eller flera av avbildningarna T_b, Δ_a, I och S .

Man kan visa att varje hyperbolisk transformation kan skrivas

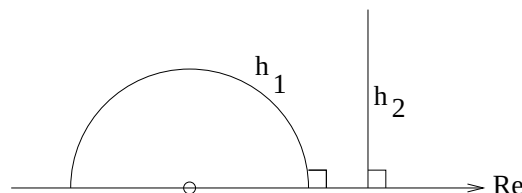
$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{eller} \quad \tilde{T}(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$$

där a, b, c, d är reella och $ad - bc > 0$. Vidare kan man visa att de hyperboliska transformationerna bildar en *transformationsgrupp*. Den *hyperboliska geometrin* är nu invariansteorin för gruppen av hyperboliska transformationer.

Hyperboliska linjer och vinklar

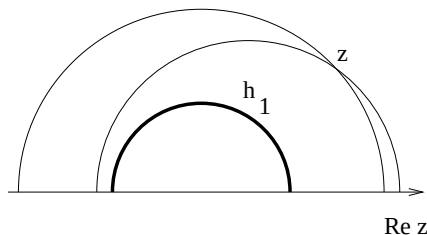
En *hyperbolisk linje* (h -line) är snitt mellan H och en generaliserad cirkel, som är *vinkelrät mot reella axeln*.

Det finns två typer av hyperboliska linjer. Dels har vi (vanliga) cirkelbågar, dels linjestycken. Om en cirkelbåge skall vara vinkelrät mot reella axeln måste motsvarande cirkel ha sin medelpunkt där.

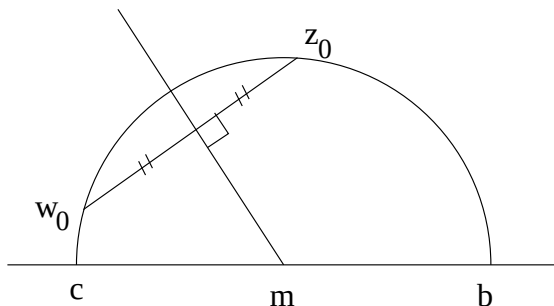


Varje hyperbolisk transformation är sammansatt av avbildningar av typen T_b , Δ_a , I och S . Dessa avbildar alla generaliserade cirkclar på generaliserade cirkclar och lämnar vinklar oförändrade. De avbildar också reella axeln på sig själv. Därför avbildar hyperboliska transformationer hyperboliska linjer på hyperboliska linjer, och lämnar dessutom vinklar mellan sådana linjer oförändrade. Alltså är hyperboliska linjer och vinklar *invarianta*.

Det är lätt att konstatera att parallellaxiomet inte gäller i den hyperboliska geometrin. Två h -linjer sägs vara parallella om de saknar skärningspunkt. Det är klart begreppet parallellitet är invariant. Givet en h -linje h_1 och en punkt $z \notin h_1$, så finns emellertid oändligt många h -linjer genom z som är parallella med h_1 . Figuren illustrerar detta!



Om z_0 och w_0 är två punkter så finns precis en hyperbolisk linje h som går igenom z_0 och w_0 . Om z_0 och w_0 har samma realdel a så är h linjen $\operatorname{Re}(z) = a$. I annat fall kan man finna h genom att bilda mittpunktsnormalen på sträckan mellan z_0 och w_0 . Där mittpunktsnormalen träffar reella axeln skall h ha sin medelpunkt. Dess radie är förstås det Euklidiska avståndet från medelpunkten till de båda punkterna z_0 och w_0 .



Det magiska dubbelförhållandet

Givet fyra olika komplexa tal z_1, z_2, z_3, z_4 så definieras deras dubbelförhållande som talet

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

Man utvidgar definitionen genom att sätta

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{cases} \infty & \text{om } z_1 = z_4 \text{ eller } z_2 = z_3 \\ 0 & \text{om } z_1 = z_3 \text{ eller } z_2 = z_4 \\ 1 & \text{om } z_1 = z_2 \text{ eller } z_3 = z_4 \end{cases}$$

Man kan definiera dubbelförhållandet även när något z_j är ∞ . Man sätter exempelvis

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Dubbelförhållandet har många viktiga egenskaper. Den viktigaste är att dubbelförhållandet är invariant under hyperboliska transformationer.

Sats 2 Låt T vara en hyperbolisk transformation. Då gäller att $(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ antingen är lika med (z_1, z_2, z_3, z_4) eller med konjugaten av (z_1, z_2, z_3, z_4) .

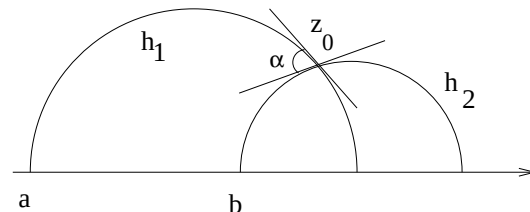
Bevis: Det räcker att bevisa satsen för de fyra transformationerna T_b, Δ_a, I och S . Eftersom dubbelförhållandet bara beror på skillnaderna mellan de inblandade punkterna är det klart att satsen gäller för translationerna T_a . Att satsen gäller för transformationerna Δ_a beror på att dubbelförhållandet innehåller kvoter. Räknereglerna för konjugering ger genast satsen för S -transformationen. Det återstår då att visa satsen för I -avbildningen. Det räcker då att observera att

$$\frac{I(u) - I(v)}{I(u) - I(w)} = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{w} - \frac{1}{u}} = \frac{u - v}{u - w}.$$

□

Dubbelförhållandets betydelse i den hyperboliska geometrin ligger i att man kan definiera olika mått med dess hjälp. Det gäller till exempel vinklar. Man kan visa att om h_1 och h_2 är två h -linjer som skär varandra i z_0 och om a och b definieras som i figuren så är vinkeln mellan h_1 och h_2 lika med

$$\alpha = \arg(a, b, z_0, \bar{z}_0)$$



Man kan också visa att fyra punkter z_1, z_2, z_3, z_4 ligger på en hyperbolisk linje då och endast då (z_1, z_2, z_3, z_4) är reellt. Man kan också definiera det hyperboliska avståndet mellan två punkter med hjälp av dubbelförhållandet.

Definition 4 Låt z_0 och w_0 vara två punkter i det hyperboliska planet och låt h vara den hyperboliska linje som går genom z_0 och w_0 . Då definieras det hyperboliska avståndet $d(z_0, w_0)$ med hjälp av formeln

$$d(z_0, w_0) = \log(z_0, w_0, c, b).$$

Om h är en Euklidisk cirkelbåge, så är b och c ändpunkterna på reella axeln tagna i ordning så att b, z_0, w_0, c följer på varandra när man går längs cirkeln. Om h är ett lodrät linjestycke, dvs om $\operatorname{Re}(z_0) = \operatorname{Re}(w_0) = a$, så är $b = a, c = \infty$ ifall $\operatorname{Im}(z_0) < \operatorname{Im}(w_0)$ och $b = \infty, c = a$ ifall $\operatorname{Im}(z_0) > \operatorname{Im}(w_0)$. □

(Denna till synes komplicerade definition motiveras i slutet av detta avsnitt!)

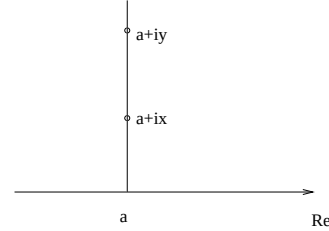
Exempel 1 Antag att $z_0 = a + ix$ och $w_0 = a + iy$. Den hyperboliska linjen genom z_0 och w_0 är då ett lodrät linjestycke.

Om vi antar att $x < y$ så skall vi enligt definitionen ta $b = a, c = \infty$. Vi får då

$$(a+ix, a+iy, \infty, a) = \frac{a+ix-\infty}{a+ix-a} : \frac{a+iy-\infty}{a+iy-a} = \frac{iy}{ix}$$

Alltså är

$$d(z_0, w_0) = \log((iy)/(ix)) = \log(y/x)$$



Exempel 2 Antag att vi tar en punkt z_0 på en hyperbolisk linje h som representeras av en halvcirkelbåge med centrum i punkten m och med radien r . Vi skall då beräkna det hyperboliska avståndet mellan z_0 och "toppen" på halvcirkeln, alltså punkten $w_0 = m + ir$.

Här är då $z_0 = m + r \exp(i\alpha)$ för något α .

Vi antar att $0 < \alpha < \pi/2$. Då skall vi välja $b = m + r$ och $c = m - r$. Vi beräknar först de olika termerna i dubbelförhållandet

$$(z_0, w_0, c, b) = \frac{z_0 - c}{z_0 - b} : \frac{w_0 - c}{w_0 - b}$$

Vi har att $z_0 - c = r(\exp(i\alpha) + 1)$ och $z_0 - b = r(\exp(i\alpha) - 1)$. Därför är

$$\frac{z_0 - c}{z_0 - b} = \frac{\exp(i\alpha) + 1}{\exp(i\alpha) - 1}$$

Alltså är

$$\frac{z_0 - c}{z_0 - b} = \frac{\exp(i\alpha/2) + \exp(-i\alpha/2)}{\exp(i\alpha/2) - \exp(-i\alpha/2)} = \frac{1}{i \tan(\alpha/2)}$$

Vidare är $w_0 - c = r(i + 1)$ och $w_0 - b = r(i - 1)$, vilket ger

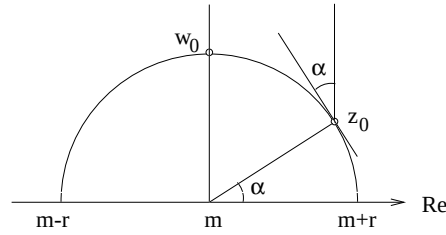
$$\frac{w_0 - c}{w_0 - b} = \frac{i + 1}{i - 1} = \frac{1}{i}$$

Detta ger till slut dubbelförhållandet

$$(z_0, w_0, c, b) = \frac{1}{\tan(\alpha/2)}$$

Således är avståndet mellan z_0 och w_0 lika med

$$d = \log(1/\tan(\alpha/2))$$



Några resultat ur den hyperboliska geometrin

Sats 3 *Vinkelsumman i en hyperbolisk triangel är alltid mindre än π .*

Sats 4 *(Femte kongruensfallet) Två trianglar med parvis lika vinklar är hyperboliskt kongruenta. Det finns med andra ord en hyperbolisk transformation som avbildar den ena triangeln på den andra.*

Denna sats säger alltså att det inte finns några olika stora likformiga (likvinkliga) trianglar. Det är alltså i princip omöjligt att bygga skalenliga modeller.

Sats 5 *(Pythagoras sats) Om a, b och c är sidorna i en rätvinklig triangel vars hypotensa är c , så gäller*

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

Projektiv geometri är all geometri

Den projektiva geometrins punktmängd $\mathbb{P}_2$ består av alla ändliga punkter (dvs $\mathbb{R}^2$) samt punkterna i oändligheten. Vi har i kapitlet om projektiv geometri sett att den affina geometrin kan ses som en delgeometri under den projektiva geometrin. Om man nämligen betraktar alla projektiva avbildningar som avbildar $\mathbb{R}^2$ på sig själv, så får man gruppen av affina avbildningar. På liknande sätt kan den hyperboliska geometrin ses som en delgeometri av den projektiva geometrin. För att förklara detta påminner vi om Cayley-Kleins modell för den hyperboliska geometrin. I denna modell betraktar man alla projektiva avbildningar som avbildar enhetsskivan $x^2 + y^2 < 1$ på sig själv. Dessa bildar en transformationsgrupp som definierar den hyperboliska geometrin. I denna mening är den hyperboliska geometrin en delgeometri av den projektiva.

Man kan nu fråga sig vilket samband som råder mellan Cayley-Kleins modell av den hyperboliska geometrin och Poincarès halvplansmodell. Man kan generellare fråga sig vad som menas med att två modeller beskriver samma geometri eller att en modell beskriver en delgeometri i en annan modell. Låt oss försöka reda ut detta.

Antag att vi har två mängder U och V . Vi tänker oss att U och V är två modeller av två geometrier. Elementen i U och V kallar vi då för punkter. På var och en av punktmängderna har vi alltså en transformationsgrupp. På punktmängden U har vi transformationsgruppen $\mathcal{F}$ och på V har vi transformationsgruppen $\mathcal{G}$. För att jämföra geometrin $(U, \mathcal{F})$ med $(V, \mathcal{G})$ tänker vi oss att det finns en injektiv avbildning $\phi : U \rightarrow V$. Värdeområdet av ϕ betecknas W . För varje transformation F i $\mathcal{F}$ definierar vi en transformation H av W på sig själv, genom att sätta $H(w) = \phi(F(u))$ om $w = \phi(u)$. Man verifierar lätt att verifiera att mängden av all sådana transformationer bildar en grupp $\mathcal{H}$. Vi säger att $(U, \mathcal{F})$ är en

delgeometri av $(V, \mathcal{G})$, om $\mathcal{H}$ är en undergrupp av $\mathcal{G}$. De båda geometrierna sägs vara lika om ϕ är bijektiv och gruppen $\mathcal{H}$ är identisk med $\mathcal{G}$.

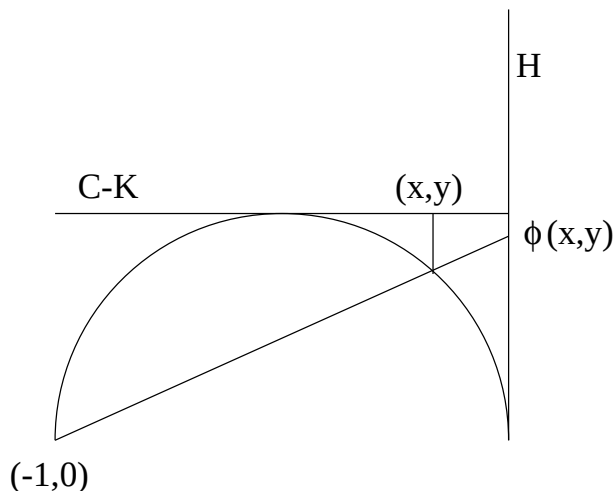
Att den affina geometrin är en delgeometri av den projektiva ser vi genom att ta $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{P}_2$ och låta ϕ vara identifikationen av punkter i $\mathbb{R}^2$ med de ändliga punkterna i det projektiva planet, alltså $\phi(x_1, x_2) = ((x_1, x_2, 1))$. Då blir $W = \mathbb{R}^2$. Transformationsgrupperna $\mathcal{F}$ och $\mathcal{H}$ sammanfaller gruppen av affina transformationer som ju utgör en undergrupp av gruppen $\mathcal{G}$ av alla projektiva transformationer.

För att se att Poincarés halvplanmodell och Cayley-Kleins modell är lika, låter vi H vara enhetsskivan och V övre halvplanet. Avbildningen ϕ ser ut så här:

$$\phi(x, y) = \frac{2}{x+1}(y + i\sqrt{1-x^2-y^2})$$

Detta är en bijektiv avbildning och man kan visa att mot varje projektiv avbildning av enhetsskivan på sig själv svarar (på det sätt som vi beskrivit ovan) en hyperbolisk transformation i halvplansmodellen (och omvänt).

Följande figur beskriver den avbildning som identifierar Cayley-Kleins modell med Poincarés halvplansmodell. I figuren representerar linjen $C - K$ Cayley-Kleins enhetsskiva (sedd från sidan), H representerar halvplanet medan halvcirkelbågen representerar en halvsfär. Koordinaterna är valda så att halvsfären har centrum i origo och radien 1.



Kommentar om avståndsdefinitionen

Vi har inte gjort något försök att förklara varför definitionen av hyperboliskt avstånd ser ut som den gör. Definitionen är emellertid den enda möjliga om man vill att det hyperboliska avståndet skall vara invariant under hyperboliska transformationer. För den intresserade följer här en liten (finstilt) utredning kring detta. Vi beskriver också hur definitionen av hyperbolisk area ser ut.

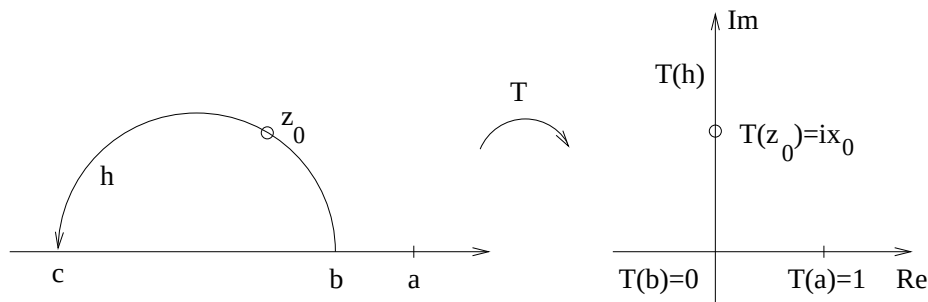
Man använda dubbelförhållandet till att definiera hyperboliska transformationer. Om a, b, c är tre reella tal definierar exempelvis

$$T(z) = (z, a, b, c)$$

en hyperbolisk transformation, förutsatt att a ligger till höger eller till vänster om både b och c . Denna transformation har egenskapen att

$$T(a) = 1, T(b) = 0, T(c) = \infty.$$

Med hjälp av denna transformation kan en godtycklig h -linje avbildas på övre imaginära axeln. Figuren visar hur det går till



Vi vill nu definiera det hyperboliska avståndet $d(z_0, w_0)$ mellan två godtyckliga punkter z_0, w_0 . Definitionen skall göras så att avståndet blir invariant under hyperboliska transformationer, dvs så att

$$(4) \quad d(T(z_0), T(w_0)) = d(z_0, w_0)$$

för alla hyperboliska transformationer T . Detta krav visar sig bestämma hur d måste se ut.

Med hjälp av transformationen $T(z) = (z, a, b, c)$ kan vi avbilda h på positiva imaginära axeln. Det räcker därför att definiera det hyperboliska avståndet mellan två punkter på positiva imaginära axeln. Säg att $T(z_0) = ix, T(w_0) = iy$ där $x < y$. Vi ansätter då

$$d(ix, iy) = \int_x^y \phi(t) dt, \quad 0 < x < y < \infty,$$

där ϕ är en okänd positiv kontinuerlig. Nu ger (4) att om s är ett positivt reellt tal så är $d(isx, isy) = d(ix, iy)$, dvs

$$d(isx, isy) = \int_{sx}^{sy} \phi(t) dt = \int_x^y \phi(t) dt.$$

Deriverar man båda leden med avstånd på y får man

$$s\phi(sy) = \phi(y).$$

Med $y = 1$ får man $s\phi(s) = \phi(1)$, dvs

$$\phi(s) = \frac{k}{s}.$$

Vi måste alltså ha

$$d(ix, iy) = k \int_x^y \frac{1}{t} dt = k \log \frac{y}{x}.$$

Nu är

$$\frac{y}{x} = (ix, iy, \infty, 0) = (T(z_0), T(w_0), T(c), T(b)).$$

Använder vi nu (4) och invariansen hos dubbelförhållandet så får vi att

$$d(z_0, w_0) = k \log(z_0, w_0, c, b).$$

Detta leder alltså till vår definition av hyperboliskt avstånd. (Välet av konstanten k är förstås godtycklig.)

Definitionen av hyperbolisk area görs på följande sätt. Det infinitesimala hyperboliska avståndet är

$$\frac{dx}{y}$$

Det är därför naturligt att definiera den infinitesimala hyperboliska arean som

$$\frac{dx \, dy}{y^2}.$$

Man kommer då till följande definition.

Definition 5 Låt Ω vara ett område i H . Då är den hyperboliska arean av Ω

$$\text{arean}(\Omega) = \int \int_{\Omega} \frac{dx \, dy}{y^2}.$$

Man kan ganska lätt visa att den hyperboliska arean är invariant under hyperboliska transformationer dvs

$$\text{arean}(T(\Omega)) = \text{arean}(\Omega).$$

Man kan visa att arean av en hyperbolisk triangel är skillanden mellan π och vinkelsumman.