

4 Plana geometrier

En geometri kan beskrivas enligt det program som Felix Klein satte upp 1872, (Kleins Erlangenprogram). Man utgår från en mängd X , vars element utgör geometrins *punkter*. På mängden X definieras sedan en *transformationsgrupp*. Den tillhörande geometrin är då läran om sådana objekt och begrepp som är *invarianta* (oförändrade) under alla transformationer i den valda transformationsgruppen.

Ordet transformationsgrupp är inte enbart ett ord för en mängd av transformationer vilken som helst. Ordet har en alldeles specifik innebörd. För att förklara detta måste vi definiera begreppen sammansättning av två avbildningar och invers till en given avbildning.

Om F är en transformation (funktion) på X med värden i X , skriver vi $F : X \rightarrow X$. Låter vi F_1 och F_2 vara två sådana transformationer kan vi definiera *sammansättningen* $F_1 \circ F_2$ genom

$$F_1 \circ F_2(P) = F_1(F_2(P))$$

Funktionen $F : X \rightarrow X$ sägs vara *injektiv* om $F(P) = F(Q)$ bara kan gälla om $P = Q$. Funktionen är *surjektiv* om det för varje $Q \in X$ finns minst ett $P \in X$ så att $F(P) = Q$. Om funktionen F är både injektiv och surjektiv sägs F vara *bijektiv*.

Om $F : X \rightarrow X$ är en bijektiv transformation kan man definiera *inversen* $F^{-1} : X \rightarrow X$ genom att sätta $F^{-1}(Q) = P$ om P är det entydiga bestämda element för vilket $F(P) = Q$. Då är tydligen $F^{-1}(F(P)) = P$ för alla $P \in X$, och $F(F^{-1}(Q)) = Q$ för alla $Q \in X$. Låter vi $Id : X \rightarrow X$ beteckna *identitetsavbildningen* (definierad genom att $Id(P) = P$) så har vi alltså att

$$F^{-1} \circ F = Id, F \circ F^{-1} = Id.$$

En *transformationsgrupp* på X är en mängd av bijektiva transformationer på X , med egenskapen att om F , F_1 och F_2 tillhör transformationsgruppen, så gäller detsamma för F^{-1} och $F_1 \circ F_2$. Det följer att Id tillhör transformationsgruppen.

Innebörden av dessa krav är att man skall kunna göra den ena geometriska operationen efter den andra och att varje operation skall kunna tas tillbaka (göras ogjord).

En transformationsgrupp kan naturligtvis definieras genom att man rått skriver upp alla avbildningar i gruppen. Men en transformationsgrupp kan också beskrivas genom att man bara definierar de mest grundläggande avbildningarna och låter transformationsgruppen vara den minsta grupp som innehåller dessa. Det innebär att transformationsgruppen består av alla sammansättningar av ändligt många av de valda grundläggande avbildningarna och deras inverser.

I detta kapitel skall jag behandla tre olika geometrier på mängden $X = \mathbb{R}^2$, nämligen *Euklides geometri*, *likformighetsgeometri* samt *affin geometri*. Dessa geometrier kommer att definieras av var sin transformationsgrupp. Avbildningarna i den grupp som definierar Euklides geometri kallas *kongruensavbildningar*. Likformighetsgeometrin definieras av

gruppen av *likformighetsavbildningar* med den affina geometrin definieras av de *affina avbildningarna*.

Euklides plana geometri

För att definiera Euklides plana (tvådimensionella) geometri enligt Kleins program, sätter vi $X = \mathbb{R}^2$ och definierar transformationsgruppen som gruppen av alla kongruensavbildningar.

Definition 1 En kongruensavbildning K på $\mathbb{R}^2$ är en funktion $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ av formen

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

där $\mathbf{U}$ är en ortogonal 2×2 -matris och $\mathbf{b}$ en punkt i $\mathbb{R}^2$.

Sats 1 Mängden av kongruensavbildningar är en transformationsgrupp.

Bevis: Antag att K_1 och K_2 är två kongruensavbildningar. Då är $K_1(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $K_2(\mathbf{x}) = \mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ där $\mathbf{U}$ och $\mathbf{V}$ är ortogonala. Det följer att

$$K_1(K_2(\mathbf{x})) = K_1(\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{c}) = \mathbf{U}(\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{c}) + \mathbf{b}.$$

Detta ger att $(K_1 \circ K_2)(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{x} + (\mathbf{U}\mathbf{c} + \mathbf{b})$. Eftersom $\mathbf{U}\mathbf{V}$ också är ortogonal, så följer det att $K_1 \circ K_2$ är en kongruensavbildning. Vidare är

$$K_1^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{U}^{-1}\mathbf{b}.$$

Eftersom $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ också är ortogonal så ser vi att även K_1^{-1} är en kongruensavbildning.

Innan jag går vidare med den Euklidiska geometrin vill jag beskriva hur kongruensavbildningarna är uppbyggda.

Sats 2 Varje kongruenstransformation på $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som sammansättning av translationer, rotationer samt speglingar i linjer. Närmare bestämt kan varje kongruensavbildning skrivas som en sammansättning av en eller flera av följande standardavbildningar

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (\text{translation})$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{R}_\theta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{rotation kring origo})$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{spegling i } x\text{-axeln})$$

Bevis: Kongruensavbildningen $K(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ är tydligen sammansättning av translationen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$ och den isometriska avbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{U}\mathbf{x}$. Det räcker därför att visa att varje isometrisk avbildning kan skrivas som sammansättning av en rotation och (eventuellt) en spegling i x -axeln.

Sätt $\mathbf{U}\mathbf{e}_1 = \mathbf{y}_1$ där $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. Eftersom $\mathbf{U}$ är en ortogonal är $|\mathbf{y}_1| = 1$. Det betyder att $\mathbf{y}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ för någon vinkel θ . Sätt nu $\mathbf{A} = \mathbf{R}_{-\theta}\mathbf{U}$. Då är

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{R}_{-\theta}\mathbf{U}\mathbf{e}_1 = \mathbf{R}_{-\theta}\mathbf{y}_1 = \mathbf{e}_1.$$

Eftersom $\mathbf{R}_{-\theta}$ och $\mathbf{U}$ är ortogonala är även $\mathbf{A}$ ortogonal. Alltså är $\mathbf{A}\mathbf{e}_2$ ortogonal mot $\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, (om $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$). Det följer att $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \pm\mathbf{e}_2$. Alltså är $\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2]$ dvs

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{eller} \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}.$$

Eftersom $\mathbf{U} = \mathbf{R}_{\theta}\mathbf{A}$ följer det att $\mathbf{U}$ antingen är lika med $\mathbf{R}_{\theta}\mathbf{I} = \mathbf{R}_{\theta}$ eller lika med $\mathbf{R}_{\theta}\mathbf{S}$. □

Euklides plana geometri är nu läran om sådana objekt och begrepp som är invarianta under alla kongruensavbildningar. Observera att man inte rör sig med några odefinierade begrepp. Allt måste definieras! För varje nytt begrepp måste begreppets invarians säkrställas.

En *linje* i $\mathbb{R}^2$ definieras med hjälp av en punkt P_0 (med koordinatvektor $\mathbf{x}_0$) och en riktningsvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Linjen består av alla punkter $P \in \mathbb{R}^2$ vars koordinatvektorer $\mathbf{x}$ uppfyller kan skrivas

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Varje kongruensavbildning kommer att avbilda en linje på en (annan) linje. Om nämligen $K(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ så är $K(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) + \mathbf{b} = \mathbf{U}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} + t\mathbf{U}\mathbf{v}$. Alltså kommer linjen genom P_0 med riktningsvektorn $\mathbf{v}$ att avbildas på linjen genom $K(P_0)$ med riktningsvektorn $\mathbf{U}\mathbf{v}$. Detta innebär att begreppet *linje* är invariant under kongruensavbildningar. Det innebär dessutom att begreppen att en punkt *ligger på* en linje eller att en linje *går igenom* en punkt är invarianta. Skärningspunkten mellan två linjer avbildas exempelvis på skärningspunkten mellan linjernas bilder. Även ordningsrelationer mellan punkter på en linje är invarianta. Om Q ligger mellan P och R på en linje så ligger $K(Q)$ mellan $K(P)$ och $K(R)$.

Avståndet mellan två punkter P och Q i $\mathbb{R}^2$ definieras som talet $d(P, Q) = |\vec{QP}|$. Kongruensavbildningar lämnar avstånd invariant. Om nämligen $P' = K(P)$, $Q' = K(Q)$ så är $\vec{Q'P'} = \mathbf{U}(\vec{QP})$, vilket ger att

$$d(P', Q') = |\mathbf{U}(\vec{QP})| = |\vec{QP}| = d(P, Q),$$

(eftersom $\mathbf{U}$ definierar en isometri). Detta visar att $d(P', Q') = d(P, Q)$ dvs att avståndet är invariant!

Vinkeln mellan två linjer definieras som vinkeln mellan linjernas riktningsvektorer. Om två linjer har riktningsvektorerna $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ så är uppfyller vinkeln α mellan dem ekvationen

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

(Eftersom riktningsvektorerna till linjer kan ha godtyckligt tecken, är α inte entydigt bestämd. Om man så önskar kan man välja α så litet som möjligt, dvs $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.) Bildlinjernas riktningsvektorer $\mathbf{U}\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{U}\mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{U}$ är en isometri så är vinkeln mellan $\mathbf{U}\mathbf{u}$ och $\mathbf{U}\mathbf{v}$ densamma som vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Därför är vinkeln mellan två linjer invariant under kongruensavbildningar.

Två linjer är *parallella* om deras riktningsvektorer $\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{v}$ är parallella, (dvs $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ där k är ett tal så att $k \neq 0$). Kongruenstransformationen $K(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ kommer att avbilda dessa linjer i två andra linjer med riktningsvektorerna $\mathbf{U}\mathbf{u}$ resp. $\mathbf{U}\mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ har vi att $\mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{U}(k\mathbf{v}) = k\mathbf{U}\mathbf{v}$. Därför är de båda bildlinjerna också parallella. Begreppet parallella linjer är således invariant under kongruensavbildningar.

Begreppet *triangel* är en annan invariant. En triangel ABC består av tre punkter A , B och C och deras sammanbindningslinjer.

Arean av en parallelogram (eller en triangel) är ännu en invariant storhet. Om P är en parallelogram och $K(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ en kongruenstransformation, så har P och dess bild, $K(P)$, samma area. Arean av $K(P)$ är nämligen lika med $|\det(\mathbf{U})|$ gånger arean av P . Men vi vet att $|\det(\mathbf{U})| = 1$, så areorna av P och $K(P)$ är lika.

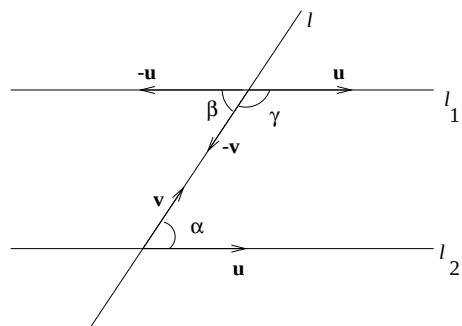
Parallellaxiomet och vinkelsumman i en triangel

Följande satser är välkända för läsaren. Jag tar med dem för att illustrera hur bevisen kan se ut om man enbart använder sig av analytisk geometri som hjälpmedel.

Sats 3 (Parallellaxiomet) *Givet en linje ℓ och en punkt P som inte ligger på ℓ , så finns precis en linje ℓ_1 genom P som är parallell med ℓ .*

Bevis: Antag att P har koordinatevektorn $\mathbf{x}_1$ och att ℓ har riktningsvektorn $\mathbf{v}$ och låt $\ell_1 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{u}$ vara en godtycklig linje genom P . Då är ℓ_1 och ℓ parallella då och endast då $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$. Detta visar satsen (eftersom $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t k\mathbf{v}$ och $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{v}$ är samma linje).

Sats 4 *Låt ℓ_1 och ℓ_2 vara två parallella linjer och ℓ en tredje linje som skär ℓ_1 och ℓ_2 . Med figurens beteckningar gäller då att alternatvinklarna α och β är lika. Vidare är summan av komplementvinklarna β och γ lika med π .*



Bevis: Vinkeln β är vinkeln mellan $-\mathbf{u}$ och $-\mathbf{v}$ i figuren. Detta ger

$$\cos(\beta) = \frac{(-\mathbf{u}) \cdot (-\mathbf{v})}{\|-\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \cos \alpha.$$

Alltså följer det att $\beta = \alpha$.

För att visa att $\beta + \gamma = \pi$ antar vi för enkelhets skull att skärningspunkten mellan ℓ och ℓ_1 ligger i origo. (Det kan vi annars åstadkomma med en translation.) Att β är vinkeln mellan $-\mathbf{u}$ och $-\mathbf{v}$ är detsamma som att $-\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{R}_\beta(-\mathbf{u})$. Att vinkeln mellan $-\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$ är γ ger sedan att

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_\gamma(\mathbf{R}_\beta(-\mathbf{u})) = \mathbf{R}_\gamma \circ \mathbf{R}_\beta(-\mathbf{u}) = \mathbf{R}_{\beta+\gamma}(-\mathbf{u})$$

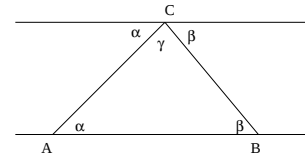
Eftersom vinkeln mellan $-\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}$ är π följer det att $\beta + \gamma = \pi$. $\square$

En direkt följd av parallellaxiomet och satsen om alternativvinklarna är att vinkelsumman i en triangel alltid är π .

Sats 5 Låt ABC vara en triangel och låt α, β, γ vara vinklarna vid A, B respektive C . Då är

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Vi nöjer oss med att beskriva beviset i en figur.

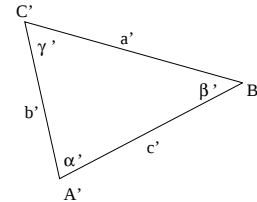
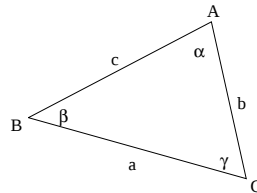


Kongruensfallen i Euklides geometri

Två trianglar är kongruenta om det finns en kongruensavbildning som avbildar den ena på den andra. I Euklides Elementa visas fyra satser (de så kallade kongruensfallen), som alla ger tillräckliga villkor för att två trianglar skall vara kongruenta. Vi presenterar kongruensfallen i en enda sats och ger sedan ett enhetligt bevis för alla fallen.

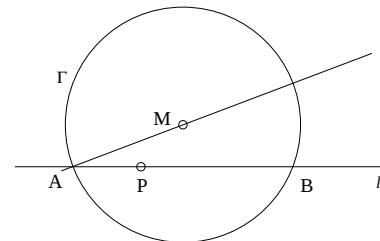
Sats 6 Låt ABC och $A'B'C'$ vara två trianglar och låt α, β, γ och α', β', γ' vara vinklarna vid hörnen A, B, C respektive A', B', C' . Låt vidare sidorna som står mot A, B, C vara a, b, c och sidorna som står mot A', B', C' vara a', b', c' . Antag hela tiden att $b' = b$. Då är trianglarna ABC och $A'B'C'$ kongruenta i vart och ett av följande fyra fall:

- I $\alpha' = \alpha, c' = c$
- II $a' = a, c' = c$
- III $\alpha' = \alpha, \gamma' = \gamma$
- IV $\alpha' = \alpha, a' = a, a > b$



Man kan bevisa kongruensfallen på många olika sätt. Vi väljer att använda två principer, vilka vi formulerar som hjälpsatser (lemmor).

Lemma 1 Låt Γ vara en cirkel med medelpunkten M och ℓ en linje eller en cirkel. Då skär ℓ cirkeln Γ i högst två punkter. Om ℓ skär Γ i de två punkterna A och B och P är en punkt i det inre av cirkeln Γ på linjen genom A och B , så ligger P på den sida om linjen genom A och M där också B ligger.



Bevis: Vi visar lemmat om ℓ är en linje. Först kan vi translatera Γ och ℓ så att medelpunkten hamnar i origo. Vi kan därefter rotera kring origo så att ℓ blir parallell med x -axeln. Då får γ ekvationen $x^2 + y^2 = R^2$ (där R är radien) och ℓ får ekvationen $y = c$. För eventuella skärningspunkter gäller då $y = c, x = \pm\sqrt{R^2 - c^2}$. Om P ligger på linjen genom skärningspunkterna och dessutom innuti cirkeln, så är $P = (x, c)$ där $x^2 + c^2 < R^2$. Därför är $x = t\sqrt{R^2 - c^2}$, $-1 < t < 1$, vilket ger att P ligger mellan A och B . Alltså gäller lemmat. $\square$

Lemma 2 *Låt ABC och $A'B'C'$ vara två trianglar med sidorna AC och $A'C'$ lika. Då finns en (entydigt bestämd) kongruensavbildning som avbildar A på A' , C på C' och B på en punkt D' , som ligger på den sida om linjen genom A' och C' där också B' ligger.*

Bevis: Translater först A till A' och gör sedan en rotation med A' som centrum så att bilden av C hamnar i C' . Om nu bilden av B ligger på fel sida om linjen $A'C'$ gör en spegling i denna linje. Detta visar existensen av den angivna kongruensavbildningen. Entydigheten överlämnas till läsaren.

Vi är nu beredda att bevisa de fyra kongruensfallen. Läsaren hänvisas till figuren vid sats 6 ovan.

Bevis av kongruensfallen:

Vi antar att $b = b'$ och använder lemma 2 för att med en kongruensavbildning avbilda A på A' , C på C' och B på en punkt D' på den sida om linjen genom A' och C' där B' ligger. Det räcker nu att visa att $D' = B'$.

I: Antag att $\alpha = \alpha'$ och $c = c'$. Eftersom $\alpha = \alpha'$ måste D' ligga på linjen genom A' och B' . Eftersom $c = c'$ ligger D' och B' på cirkeln med centrum i C' och radien c . Lemma 1 ger då att $D' = B'$.

II: Antag att $a = a'$ och $c = c'$. Då ligger D' och B' båda på cirkelarna med centrum i A' och C' med radierna a respektive c . Lemma 1 ger då åter att $D' = B'$.

III: Antag att $\alpha = \alpha'$ och $\gamma = \gamma'$. Då ligger D' på skärningslinjen mellan linjerna $A'B'$ och $C'B'$, vilket genaast ger $D' = B'$.

IV: Antag att $\alpha = \alpha'$, $a = a'$ och $a > b$. Då ligger D' på linjen $A'B'$ och (liksom B') på cirkeln med medelpunkt i C' och radien $a = a'$. Eftersom $b' < a'$, så ligger A' inuti denna cirkel. Därför ger lemma 1 att $D' = B'$. $\square$

Likformighetsgeometri

Likformighetsgeometri (eller likformighetslära) är en utvidgning av den Euklidiska geometrin. Linjer, parallella linjer och vinklar är invarianta, men inte avstånd och areor. Däremot är relativa avstånd (kvoter mellan avstånd) och relativa areor invarianta. Likformighetsläran definieras med hjälp av en transformationsgrupp som förutom kongruenstransformationer också innehåller skalförändringar, dvs avbildningar av formen

$$\Delta_s : \mathbf{x} \mapsto s\mathbf{x},$$

där s är ett positivt reellt tal, (*skalningsfaktorn*).

Definition 2 En likformighetstransformation L på $\mathbb{R}^2$ är en godtycklig avbildning som kan skrivas som en sammansättning mellan translation, rotation kring origo, spegling i en linje (t.ex. x -axeln) och en skalförändring. Varje sådan avbildning kan skrivas

$$\mathbf{x} \mapsto s\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

där $\mathbf{U}$ är en ortogonal matris, och $s > 0$!

Man visar utan svårighet att mängden av likformighetstransformationer bildar en transformationsgrupp. Vidare ser man direkt att *linjer avbildas på linjer* och att *vinklar mellan linjer* är invarianta. Parallella linjer avbildas på parallella linjer. Däremot är avstånd inte invariant. En skalförändring kommer nämligen att multiplicera alla avstånd med skalningsfaktorn s . Areor multipliceras på liknande sätt med s^2 . Däremot är relationer mellan avstånd och areor invarianta, vilket uttrycks i följande sats.

Sats 7 Låt A, B, C, D vara fyra punkter i $\mathbb{R}^2$ och L en likformighetstransformation. Då är

$$(1) \quad \frac{d(L(A), L(B))}{d(L(C), L(D))} = \frac{d(A, B)}{d(C, D)} \quad (\text{om } C \neq D)$$

Om P och Q är två parallelogrammer så är

$$\frac{\text{arean}(L(P))}{\text{arean}(L(Q))} = \frac{\text{arean}(P)}{\text{arean}(Q)} \quad (\text{om } \text{arean}(Q) \neq 0)$$

Bevis: Vi nöjer oss med att visa den första delen av satsen. Eftersom kongruenstransformationer lämnar avstånd invarianta, gäller satsen om L är en sådan avbildning. Det räcker därför att betrakta fallet då L är en skalförändring, dvs $L(\mathbf{x}) = \Delta_s(\mathbf{x}) = s\mathbf{x}$. Men då är $d(L(A), L(B)) = |s\vec{BA}| = s|\vec{BA}| = s d(A, B)$ och $d(L(C), L(D)) = s d(C, D)$. Detta ger (1). $\square$

Några satser ur likformighetsläran

Vi nöjer oss med att behandla två ganska enkla resultat. Det första kallas ibland *Wallis axiom*. Det har spelat en roll i samband med parallellaxiomets historia.

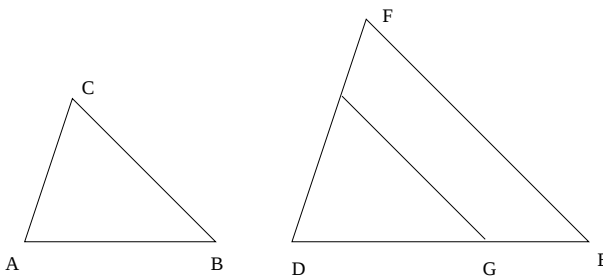
Sats 8 Givet en godtycklig triangel ABC och två punkter D och E . Då finns en triangel DEF så att ABC är likformig med DEF , (dvs det finns en likformighetsavbildning som avbildar A, B och C på D, E resp. F).

Bevis: Låt oss anta att D ligger i origo. (Det allmänna fallet kan reduceras till denna situation med hjälp av translationer.) Det finns en kongruensavbildning K (sammansatt av en translation och en rotation) som avbildar A på $D = 0$ och B på en punkt G liggande på linjen genom D och E . Vi kan välja K så att G ligger på samma sida om B som E gör.

Låt nu Δ_s vara skalförändringen med skalningsfaktorn

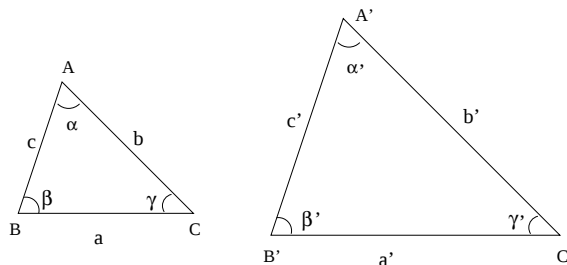
$$s = \frac{|\vec{DE}|}{|\vec{AB}|}.$$

Då avbildar Δ_s punkten G på punkten E . Likformighetsavbildningen $L = \Delta_s \circ K$ kommer då att avbilda A på D , B på E och C på en punkt F . Då är således triangeln ABC likformig med DEF .



Sats 9 (De fyra likformighetsfallen) *Låt ABC och $A'B'C'$ vara två trianglar och låt α, β, γ och α', β', γ' vara vinklarna vid hörnen A, B, C respektive A', B', C' . Låt vidare sidorna som står mot A, B, C vara a, b, c och sidorna som står mot A', B', C' vara a', b', c' . Antag hela tiden att b och b' är proportionella så att $b' = sb$, där s är ett givet positivt tal. Då är trianglarna ABC och $A'B'C'$ likformiga i vart och ett av följande fyra fall:*

- I $\alpha' = \alpha, c' = sc$
- II $a' = sa, c' = sc$
- III $\alpha' = \alpha, \gamma' = \gamma$
- IV $\alpha' = \alpha, a' = sa, a > b$



Bevis: Efter en translation kan vi anta att A ligger i origo. Skalförändringen Δ_s kommer att avbilda triangeln ABC på triangeln $A''B''C''$, där $A'' = A$. Om vinklarna och sidorna i $A''B''C''$ är $\alpha'', \beta'', \gamma''$ respektive a'', b'', c'' , så gäller $\alpha'' = \alpha, \beta'' = \beta$ och $\gamma'' = \gamma$ samt $a'' = sa, b'' = sb$ och $c'' = sc$. Därför har vi att $b'' = b'$.

Välj nu ett av likformighetsfallen I-IV. Enligt motsvarande kongruensfall är trianglarna $A'B'C'$ och $A''B''C''$ kongruenta. Eftersom $A''B''C''$ är likformig med ABC (enligt konstruktionen) så följer det att ABC är likformig med $A'B'C'$. $\square$

Affin geometri

När vi införde likformighetsläran i föregående avsnitt utökade vi den Euklidiska geometriens kongruenstransformationer genom att lägga till alla skalförändringar $(x_1, x_2) \mapsto s(x_1, x_2) = (sx_1, sx_2)$. Det är då viktigt att observera att vi ändrar skalan med *samma skalfaktor s i alla riktningar*. Vi skall nu acceptera olika skalfaktorer i olika riktningar, genom att exempelvis acceptera avbildningar av formen $(x_1, x_2) \mapsto (s_1x_1, s_2x_2)$, där man har olika skalfaktorer i koordinataxlarnas riktningar. Nu kan man naturligtvis vilja ha olika skalfaktorer i andra riktningar än just axlarnas. Därför skall vi nu betrakta generella linjära avbildningar $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$.

$M\mathbf{x}$.

Den affina geometrin på $\mathbb{R}^2$ definieras med hjälp av gruppen av alla *affina transformationer* dvs alla avbildningar av formen

$$\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

där $\mathbf{M}$ är en inverterbar 2×2 -matris och $\mathbf{b}$ en vektor i $\mathbb{R}^2$. Följande lemma spelar en viktig roll i den affina geometrin.

Lemma 3 *Givet två trianglar ABC och $A'B'C'$ så finns en entydigt bestämd affin avbildning F , sådan att $F(A) = A'$, $F(B) = B'$ och $F(C) = C'$.*

Bevis: Om $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$ är två par av icke-parallella vektorer så finns en entydigt bestämd matris $\mathbf{M}$ som avbildar $\mathbf{u}$ på $\mathbf{u}'$ och $\mathbf{v}$ på $\mathbf{v}'$, nämligen $\mathbf{M} = [\mathbf{u}' \ \mathbf{v}'][\mathbf{u} \ \mathbf{v}]^{-1}$. Vi använder detta med

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}, \ \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}, \ \mathbf{u}' = \overrightarrow{A'B'}, \ \mathbf{v}' = \overrightarrow{A'C'}$$

Vi definierar då den affina avbildningen F genom att sätta

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{x} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA'}$$

Det är då lätt att verifiera att $F(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'}$, $F(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB'}$ och $F(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC'}$, dvs att F avbildar A, B, C på A', B' resp. C' .

Det är klart att linjer avbildas på linjer och att relationer som ”punkten A ligger på linjen ℓ ” eller ”linjerna ℓ_1 och ℓ_2 skär varandra i punkten A ” bevaras under affina transformationer. Samma sak kan sägas om ordningsrelationer som ”punkten B ligger mellan A och C ”. *Tillhörighetsrelationer* och *ordningsrelationer* är med andra ord invarianta under affina transformationer och tillhör därmed den affina geometrin. Vinklar, däremot, lämnas inte oförändrade av varje affin avbildning. Inte heller avstånd eller relativa avstånd mellan godtyckliga punkter. Däremot är *relativa avstånd mellan punkter på en linje* invarianta. (Detta är naturligt eftersom en affin transformations restriktion till en linje är en likformighetsavbildning.) Låt oss precisera detta.

Definition 3 *Låt A, B och C vara tre punkter på en linje. Om $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ och $A \neq C$ skriver vi*

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}.$$

Vi kallar λ för det relativa avståndet (med tecken) mellan A, B och A, C . □

Relativa avstånd mellan punkter på en linje är invariant under alla affina avbildningar. Låt nämligen A, B, C vara tre punkter på en linje och sätt $A' = F(A)$, $B' = F(B)$, $C' = F(C)$ där $F(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ är en godtycklig affin avbildning. Då är $\overrightarrow{A'B'} = \mathbf{M}(\overrightarrow{AB})$ och $\overrightarrow{A'C'} = \mathbf{M}(\overrightarrow{AC})$. Om således $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ får vi att $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{A'C'}$ så att

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}.$$

Relativa areor är också invariant under affina avbildningar. Låt nämligen P och Q vara parallelogrammer och $F(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ en affin avbildning. Då är arean av $F(P)$ av bilden $F(P)$ lika med $|\det(\mathbf{M})|$ gånger arean av P . Därför är

$$\frac{\text{arean}(F(P))}{\text{arean}(F(Q))} = \frac{\text{arean}(P)}{\text{arean}(Q)}.$$

Några resultat ur affin geometri

Låt A och B vara två punkter och låt C vara mittpunkten på sträckan AB . Att C är mittpunkten innebär att

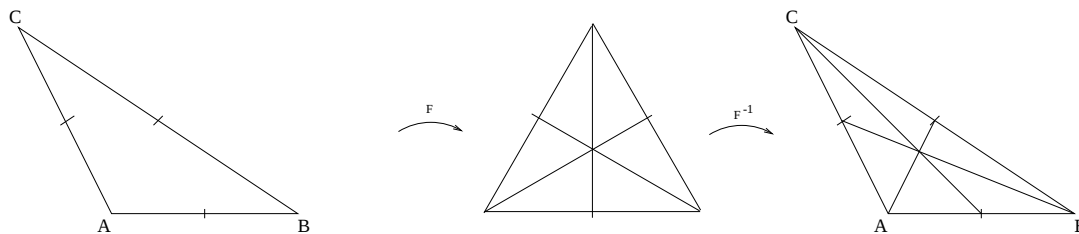
$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -1.$$

Eftersom relativa avstånd lämnas oförändrade under affina transformationer är således begreppet mittpunkt (affint) invariant. Om A', B', C' är bilderna av A, B resp. C under en affin avbildning kommer C' att vara mittpunkt på sträckan $A'B'$.

Vi skall visa en välkänd sats om *medianerna* i en triangel. Som bekant är en median i en triangel en linje som sammanbinder ett hörn med motstående sidas mittpunkt. Därför är begreppet median affint invariant.

Sats 10 *De tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis: Låt ABC vara en given triangel. Enligt lemma 2 kan vi finna en affin avbildning F , som avbildar ABC på vilken annan triangel som helst, till exempel på den liksidiga triangel vars hörn är $(-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1)$ och $(0, 2)$. Av symmetriskäl (eller med hjälp av en enkel kalkyl) ser man att medianerna i denna liksidiga triangel att skära varandra i en punkt (här origo). Eftersom skärningspunkter mellan linjer är affint invarianta, så följer det att medianerna i triangeln ABC skär varandra i punkten $D = F^{-1}(O)$. Figuren illustrerar beviset.



Satsen om medianernas skärningspunkter kan bevisas på många sätt, t.ex. genom att använda enbart likformighetsteori eller med enkel vektorräkning. Det valda beviset illustrerar emellertid en generell metod som kan beskrivas så här.

Vi vill visa en geometrisk sats. Först frågar vi oss vilken geometri som satsen ingår i. Det är detsamma som att fråga efter vilka transformationer som lämnar satsens geometriska

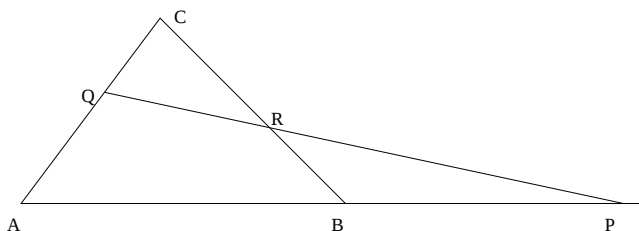
begrepp oförändrade. Därefter använder vi en av dessa transformationer för att överföra satsen till en situation i vilken man kan räkna sig fram till att satsen gäller. Därefter använder man den inversa transformationen för att komma tillbaka till den generella satsen. Beviset av satsen om medianernas skärningspunkter illustrerar metoden.

Det är viktigt att identifiera vilka transformationer som lämnar satsens utsagor oförändrade. Låt oss till exempel tänka på den sats som säger att *höjderna* i en triangel skär varandra i en punkt. Eftersom en höjd i en triangel är en linje genom ett hörn, vilken skär motstående sida under *rät vinkel*, så är begreppet höjd inte affint invariant. Den nämnda satsen om höjderna i en triangel kan alltså *inte* bevisas med hjälp av affina transformation. Det är med andra ord inte en sats inom affin geometri. Däremot tillhör satsen likformighetsläran, eftersom likformighetsavbildningar lämnar vinklar oförändrade.

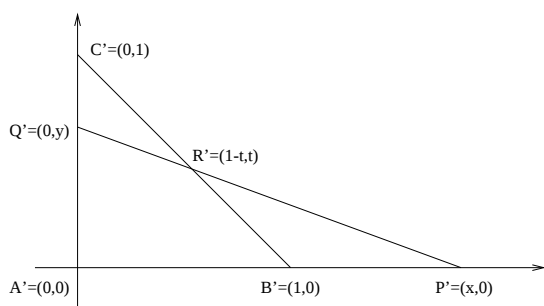
Låt oss illustrera med en annan sats ur den affina geometrin

Sats 11 (Menelaos sats) *Låt ABC vara en triangel och P, Q, R punkter på linjerna genom A, B genom A, C resp. genom B, C . Om ingen av punkterna P, Q, R sammanfaller med triangelns hörn så ligger P, Q, R på en linje då och endast då*

$$\delta = \frac{\vec{PA}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{RB}}{\vec{RC}} \cdot \frac{\vec{QC}}{\vec{QA}} = 1$$



Bevis: Vi transformerar triangeln ABC till triangeln $A'B'C'$ med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ med hjälp av en affin avbildning. Då kommer Q att avbildas på $Q' = (0, y)$ och P att avbildas på $P' = (x, 0)$. Punkten R avbildas på en punkt R' på linje genom $(1, 0)$ och $(0, 1)$, vilket innebär att $R' = (1 - t, t)$ för något t . Observera att förutsättningarna i satsen ger att inget av talen x, y, t kan vara 0 eller 1.



Villkoret för att R' ligger på linjen genom Q' och P' är att $(1 - t, t) = (x, 0) + \lambda(-x, y) = ((1 - \lambda)x, \lambda y)$. Detta är ekvivalent med att

$$t = \lambda y, 1 - t = (1 - \lambda)x.$$

Eliminerar man λ ser man att detta i sin tur är ekvivalent med att

$$(1) \quad \frac{t}{1 - t} = \frac{(1 - x)y}{(y - 1)x}$$

Nu är

$$\delta' = \frac{\vec{P'A'}}{\vec{P'B'}} \cdot \frac{\vec{R'B'}}{\vec{R'C'}} \cdot \frac{\vec{Q'C'}}{\vec{Q'A'}} = \frac{-x}{1 - x} \cdot \frac{-t}{1 - t} \cdot \frac{1 - y}{-y}.$$

Således är (1) ekvivalent med att $\delta' = 1$. Eftersom relativa avstånd är invarianta under affina transformationer är detta ekvivalent med att $\delta = 1$. $\square$

Hierarkier av olika geometrier

Till en transformationsgrupp hör en geometri i vilken man studerar de begrepp som är invarianta. Om man utökar transformationsgruppen genom att lägga till nya transformationer får man en ny geometri. Varje begrepp som är invariant under den nya, utökade, transformationsgruppen är naturligtvis också invariant under den ursprungliga, mindre, gruppen, men det kan hända att vissa begrepp som är invarianta för den mindre gruppen inte är det för den större gruppen. Vi såg detta till exempel när vi utökade gruppen av kongruensavbildningar genom att lägga till skalförändringar. Vi fick då den större gruppen av likformighetsavbildningar, vilka inte lämnar avstånd invarianta, medan kongruensavbildningar ju gör det. Det är alltså så att ju större transformationsgrupp desto färre invarianta begrepp. Å andra sidan kan man göra fler operationer på de invarianta begrepp som återstår, eftersom man har fler transformationer att tillgå. Vi såg detta i beviset av Menelaos sats, där vi gjorde en transformation av den givna triangeln som är förbjuden i t.ex. den Euklidiska geometrin.

Vi har i detta kapitel diskuterat tre olika geometrier, den Euklidiska, likformighetsgeometrin och den affina geometrin. Den förstnämnda definieras med hjälp av kongruenstransformationer (translation, rotation och spegling), den andra av likformighetsavbildningar (dvs kongruensavbildningar och skalförändringar), den tredje av alla affina avbildningar. Varje kongruensavbildning är också en likformighetsavbildning och varje likformighetsavbildning är en affin transformation. Därför är varje begrepp som är invariant under alla affina avbildningar också invariant under alla likformighetsavbildningar och alla kongruensavbildningar. Vi visar ett litet schema över olika begrepp som vi har behandlat och anger för varje begrepp om det är invariant eller inte.

	<u>Euklidisk g.</u>	<u>Likformighetsg.</u>	<u>Affin g.</u>
linjer	invariant	invariant	invariant
relativa avstånd på en linje	invariant	invariant	invariant
relativa avstånd	invariant	invariant	ej invariant
vinklar	invariant	invariant	ej invariant
avstånd	invariant	ej invariant	ej invariant
areor	invariant	ej invariant	ej invariant

Vi kan således införa en hierarkiska ordning mellan olika geometrier genom att säga att en geometri är underordnad en annan om den transformationsgrupp som definierar den första geometrin är inkluderad i den grupp som definierar den andra geometrin, eller om (ekvivalent) mängden av invarianta objekt för den första (underordnade) geometrin omfattar mängden av invarianta objekt för den andra geometrin. Således är Euklides geometri underordnad likformighetsläran som i sin tur är underordnad den affina geometrin. Den affina geometrin är i sin tur underordnad den *projektiva geometrin* som vi skall behandla

senare. Det finns geometrier som är underordnade den Euklidiska. Man kan också ha andra hierarkier av geometrier. Under den projektiva geometrin finns många olika geometrier, t.ex. den *hyperboliska geometrin* och den *elliptiska geometrin*. Observera att varje sats som är sann i en viss geometri också är sann i alla underordnade geometrier.

Geometri i det komplexa talplanet

Vi har valt att använda $\mathbb{R}^2$ som punktmängd när vi definierat olika plana geometrier. Det hade varit möjligt att välja det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ som punktmängd. I själva verket kan man ju identifiera $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$, eftersom punkterna i $\mathbb{C}$ (de komplexa talen) består av alla tal av form $x + iy$, x, y reell, svarande mot punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vissa detaljer i den tidigare framställning blir enklare i komplexa talplanet, andra blir mer komplicerade. I vår senare diskussion om hyperbolisk geometri kommer det emellertid att vara betydligt enklare att arbeta i $\mathbb{C}$. Vi skall därför här beskriva den Euklidiska geometrin och likformighetsläran sådan som den ser ut i komplexa talplanet. Det räcker då att beskriva hur kongruensavbildningar och likformighetsavbildningar ser ut.

En *translation* i komplexa talplanet är en avbildning av formen $z \mapsto z + b$, där b är ett fixt komplext tal. Detta svarar precis mot translation i $\mathbb{R}^2$.

En *rotation* (kring origo) är en avbildning av formen

$$z \mapsto e^{i\theta} z.$$

Här är $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Man övertygar sig lätt om att detta svarar mot rotation med vinkeln θ i $\mathbb{R}^2$.

Spegling i reella axeln (x -axeln) är avbildningen

$$z \mapsto \bar{z}$$

där $\bar{z}$ är det konjugerade komplexa talet (alltså $\bar{z} = x - iy$ om $z = x + iy$). För framtida bruk noterar vi att $z \mapsto -\bar{z}$ är spegling i imaginära axeln (y -axeln).

En *kongruenstransformation* på $\mathbb{C}$ är en sammansättning av en eller flera av ovan nämnda tre avbildningstyper. Detta ger alla avbildningar av formen

$$z \mapsto e^{i\theta} z + b \quad \text{eller} \quad z \mapsto e^{i\theta} \bar{z} + b.$$

Sätter vi $a = e^{i\theta}$ så får vi (eftersom $|e^{i\theta}| = 1$) att en kongruensavbildning på $\mathbb{C}$ har utseendet

$$z \mapsto az + b \quad \text{eller} \quad z \mapsto a\bar{z} + b$$

där a är ett komplext tal med belopp 1, ($|a| = 1$) och b är ett godtyckligt komplext tal.

Skalförändringar i $\mathbb{R}^2$ svarar mot avbildningar av formen $z \mapsto sz$ där s är reellt och positivt. Sätter vi samman en sådan avbildning med en kongruensavbildning får vi en avbildning

av formen $z \mapsto saz + b$ eller $z \mapsto sa\bar{z} + b$, där $|a| = 1$. Om vi här ersätter sa med a får vi således avbildningar av formen

$$z \mapsto az + b \quad \text{eller} \quad z \mapsto a\bar{z} + b$$

där nu $a \neq 0$. Dessa avbildningar är *likformighetstransformationerna* på $\mathbb{C}$.

Som bekant kan varje komplext tal $z \neq 0$ skrivas i polär form

$$z = re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

Om $z = x + iy$ är $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ (beloppet av z) och $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Vinkeln θ kallas argumentet för z och skrivs

$$\theta = \arg(z).$$

Om $z = re^{i\theta}$ och $w = se^{i\varphi}$ är två komplexa tal (båda $\neq 0$) kallas $|\theta - \varphi|$ för *vinkeln* mellan z och w . Detta svarar mot definitionen av vinklar mellan vektorer i $\mathbb{R}^2$.

Liksom i $\mathbb{R}^2$ kan linjer i $\mathbb{C}$ beskrivas i parameterform med hjälp av en punkt z_0 på linjen och en riktning v (ett komplext tal $\neq 0$). Linjen består av alla $z = z_0 + tv$. Vinklar mellan två linjer definieras som vinkeln mellan linjernas riktningar. Det är klart att linjer och vinklar mellan linjer är invarianta under likformighetsavbildningarna.

Affina avbildningar kan skrivas

$$z \mapsto az + b\bar{z} + c$$

där a, b, c är godtyckliga komplexa tal sådana att $|a| \neq |b|$.