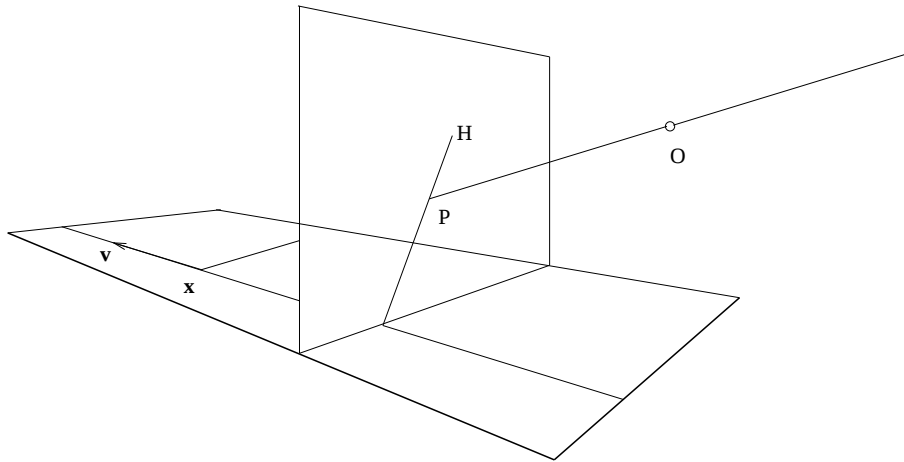


5 Projektiv geometri

Den projektiva geometrin kan ses som en utveckling av renässansens centralperspektiv. Konstnärer placerar sitt skarpa öga i en fix punkt, spänner upp en (transparent) duk framför sig och börjar teckna motivet. Från en punkt i motivet löper en tänkt linje till konstnärens öga. Där denna linje möter duken sätter konstnären en punkt. Detta är bilden av den verkliga punkten i motivet.



Låt oss anta att konstnärens öga placeras i origo i $\mathbb{R}^3$ och att hans målarduk representeras av planet $x_3 = 1$. Om då $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ är en punkt i motivet och P dess bild på duken så gäller $\overrightarrow{OP} = t\mathbf{x}$, där t skall väljas så att tredjekoordinaten får värdet 1, dvs $t = 1/x_3$. Det betyder att $\overrightarrow{OP} = (1/x_3)\mathbf{x}$. Den centralperspektiviska projektion (centralprojektionen) $\mathcal{C}$ är nu avbildningen $\mathbf{x} \mapsto P$, dvs

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_3}\mathbf{x}.$$

Här måste naturligtvis $x_3 \neq 0$. Punkterna i planet $x_3 = 0$ (dvs punkterna i det med duken parallella planet genom origo) saknar av naturliga skäl en bild under centralprojektionen. Låt oss nu undersöka bilderna av punkterna på linjen $L : \mathbf{y} = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, där vi antar att $v_3 \neq 0$. Punkterna $\mathbf{y}$ på L kommer att avbildas på en rät linje i projektionsplanet, nämligen den rätta linje som är snittet mellan det plan genom origo som innehåller L och projektionsplanet. Enda undantaget är förstås den punkt $\mathbf{y}$ vars tredjekoordinat är $y_3 = 0$. Denna punkt saknar ju bild. Om $y_3 = x_3 + tv_3 \neq 0$ är tydligen

$$\mathcal{C}(\mathbf{y}) = \frac{1}{x_3 + tv_3}(x_1 + tv_1, x_2 + tv_2, x_3 + tv_3).$$

Då $t \rightarrow \infty$ konvergerar $\mathcal{C}(\mathbf{y})$ mot $\frac{1}{v_3}(v_1, v_2, v_3)$. Detta är punkten H i figuren. Punkterna på en rät linje L med riktningsvektorn $\mathbf{v}$ kommer alltså att avbildas i punkterna på en rät linje genom "flyktpunkten" H . Detta gäller för alla punkter på L utom den som ligger i planet

$x_3 = 0$, dvs det plan genom projektionscentrum som är parallellt med projektionsplanet. Dessutom förutsätts det att $v_3 \neq 0$, dvs att linjen L inte är parallell med projektionsplanet.

Observera att vi inte bara projicerar punkter bakom duken, (projektionsplanet). Vi projicerar alla punkter i $\mathbb{R}^3$, (utom projektionscentrum).

Om $x_3 \neq 0$ kommer varje punkt på linjen genom 0 och $\mathbf{x}$ (utom 0) att ha samma bild, punkten P i figuren. Låt oss nu undersöka vad som händer då $x_3 \rightarrow 0$. Vi har att

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_3}\mathbf{x} = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right) = (0, 0, 1) + \frac{1}{x_3}(x_1, x_2, 0).$$

Det betyder att $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ ligger på linjen genom $(0, 0, 1)$ med riktningsvektorn $(x_1, x_2, 0)$. Om $x_3 \rightarrow 0$ (från höger eller vänster) går x_3 mot $\pm\infty$. Man kan säga att $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ går mot oändligheten i riktningen $(x_1, x_2, 0)$.

Här föreligger tydligen två likartade situationer. Om vi å ena sidan i $\mathbb{R}^3$ följer en linje med riktningsvektorn $\mathbf{v}$ ut mot oändligheten så kommer bilden att närma sig flyktpunkten H . Denna är så att säga bilden av "punkten i oändligheten" i riktningen $\mathbf{v}$. (Vi antar $v_3 \neq 0$!) Å andra sidan, om vi följer bilden av $\mathbf{x}$ då $x_3 \rightarrow 0$ så kommer denna bild att gå mot oändligheten i riktningen $(x_1, x_2, 0)$. Punkterna i planet $x_3 = 0$ svarar på detta sätt mot "punkter i oändligheten" i projektionsplanet.

Centralprojektion, som avbildning av $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ till planet $x_3 = 1$, är uppenbarligen inte en-entydig. Två punkter på samma linje genom origo har ju samma bild. Därför är det naturligt att studera alla punkter som har samma bild, dvs alla punkter på en linje genom origo, (med origo själv undantagen). En linje genom origo, med origo självt borttagen, kallas en *stråle*. Varje stråle bestäms av en riktningsvektor $\mathbf{x}$, men en stråle kan beskrivas av olika riktningsvektorer. Samma stråle bestäms av $\rho\mathbf{x}$ där $\rho \neq 0$. Om $x_3 \neq 0$ så avbildas alla strålens punkter på punkten $P = \frac{1}{x_3}(x_1, x_2, x_3)$ i projektionsplanet π (dvs planet $x_3 = 1$). Vi skall nu utvidga projektionsplanet genom att tillfoga "punkter i oändligheten", vilka skall svara mot (vara bilder av) strålar i planet $x_3 = 0$. Därefter skall vi utvidga definitionen av centralprojektion, så att varje stråle får en en-entydig motsvarighet i det utvidgade planet.

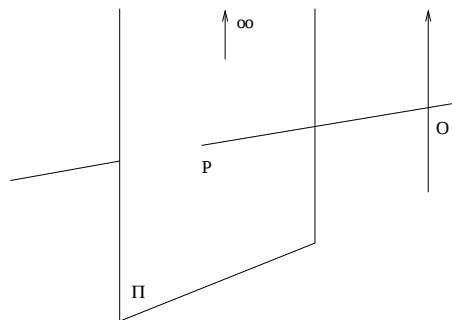
Det projektiva planet $\mathbb{P}_2$

Vi skall nu beskriva en modell för den projektiva geometrin. Först diskuterar vi modellens punkter.

En *stråle* i $\mathbb{R}^3$ är en godtycklig linje genom origo (med origo själv borttagen). Om strålen har riktningsvektorn $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ så kallas $\mathbf{x}$ strålens *homogena koordinater*.

Observera att om $\mathbf{x}$ är homogena koordinater för en stråle så är $\rho\mathbf{x}$, $\rho \neq 0$ också homogena koordinater för samma stråle.

Definition 1 En *projektiv punkt* är en stråle. Mängden av alla projektiva punkter utgör det *projektiva planet* $\mathbb{P}_2$. Varje projektiv punkt P beskrivs med sina homogena koordinater $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ (eller $\rho\mathbf{x}, \rho \neq 0$). Om $x_3 = 0$ kallas P för *punkten i oändligheten* i riktningen $(x_1, x_2, 0)$. Om $x_3 \neq 0$ är P en *vanlig punkt* och vi identifierar P med punkten $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)$ i planet $x_3 = 1$

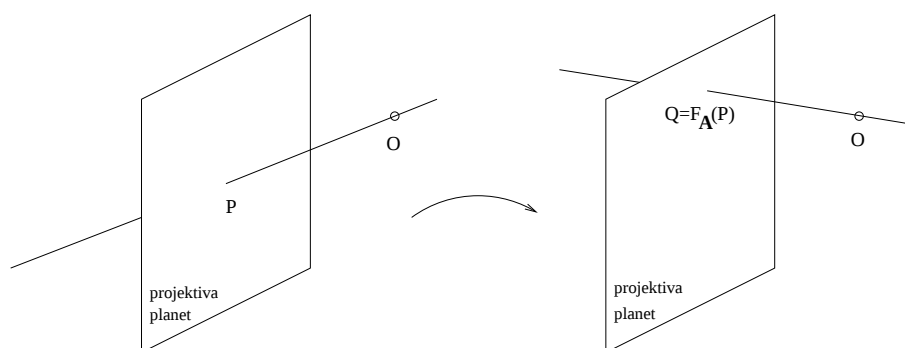


Det finns således två typer av punkter i det projektiva planet $\mathbb{P}_2$, vanliga punkter och punkter i oändligheten. En vanlig punkt har homogena koordinater $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ där $x_3 \neq 0$. En sådan punkt P kan identifieras med punkten $(\xi_1, \xi_2, 1)$ (i projektionsplanet $x_3 = 1$), där $\xi_1 = x_1/x_3$, $\xi_2 = x_2/x_3$. En punkt i oändligheten har homogena koordinater med $x_3 = 0$. En sådan punkt identifieras med vektorn $(\xi_1, \xi_2, 0)$, där ξ_1 och ξ_2 är tal så att $\xi_1 = \rho x_1$, $\xi_2 = \rho x_2$ för något $\rho \neq 0$. Vi skriver

$$P = (\xi_1, \xi_2, 1) \quad \text{om} \quad P \text{ är en vanlig punkt.}$$

$$P = (\xi_1, \xi_2, 0) \quad \text{om} \quad P \text{ är en punkt i oändligheten.}$$

Vi övergår nu till att definiera begreppet *projektiv avbildning*. Låt T vara en bijektiv linjär avbildning på $\mathbb{R}^3$, given av den inverterbara 3×3 -matrisen $\mathbf{A}$. Till en projektiv punkt P med homogena koordinater $\mathbf{x}$, kan vi nu ordna den projektiva punkt Q vars homogena koordinater är $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Detta ger upphov till en bijektiv avbildning $F_{\mathbf{A}} : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ som avbildar P på Q . En sådan avbildning kallas en *projektiv avbildning*. Mängden av sådana avbildningar bildar en transformationsgrupp, eftersom $F_{\mathbf{A}} \circ F_{\mathbf{B}} = F_{\mathbf{AB}}$ och $F_{\mathbf{A}}^{-1} = F_{\mathbf{A}^{-1}}$. Låt oss illustrera idé i en figur:



Den projektiva geometrin är nu läran om vad som är invariant under alla projektiva avbildningar. Vi börjar med att studera projektiva linjer.

Projektiva linjer

En projektiv linje bestäms av två projektiva punkter. Varje projektiv punkt är bild under centralprojektion av en stråle genom origo, (i $\mathbb{R}^3$). Två strålar genom origo bestämmer ett plan genom origo. Ett sådant plan bestäms av sin normal $\mathbf{y}$. Planets ekvation är då

$$(1) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

Vi gör därför följande definition.

Definition 2 En *projektiv linje* $\ell_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y} \neq 0$ består av alla projektiva punkter, vars homogena koordinater $\mathbf{x}$ uppfyller sambandet (1). Varje vektor $\rho \mathbf{y}$, $\rho \neq 0$ kallas den projektiva linjens homogena koordinater.

Om $x_3 \neq 0$ är (1) ekvivalent med $y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 = 0$, där $\xi_j = x_j/x_3$. Detta är ekvationen för en vanlig linje, utom i fallet $y_1 = y_2 = 0$. Sambandet (1) uppfylls dessutom om $x_3 = 0$ och $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$. Det innebär att (1) också gäller för punkten i oändligheten $(\xi_1, \xi_2, 0)$ om $\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 = 0$. Alltså är den projektiva linjen $\ell_{\mathbf{y}}$ är en vanlig linje kompletterad med en punkt i oändligheten

$$\begin{array}{ccccc} \overset{\infty}{\longleftarrow} & & & & \overset{\infty}{\longrightarrow} \\ (\xi_1, \xi_2, 0) & l & (\xi_1, \xi_2, 1) & & (\xi_1, \xi_2, 0) \end{array}$$

Om $y_1 = y_2 = 0$ ger sambandet (1) att $x_3 = 0$. I detta fall består $\ell_{\mathbf{y}}$ tydligen enbart av punkter $(x_1, x_2, 0)$, dvs av punkter i oändligheten. Vi säger då att $\ell_{\mathbf{y}}$ är *linjen i oändligheten*.

Sats 1 En projektiv transformation avbildar en godtycklig projektiv linje på en projektiv linje.

Bevis: Låt $\ell_{\mathbf{y}}$ vara en projektiv linje och $F_{\mathbf{A}}$ en projektiv transformation. En projektiv punkt P med homogena koordinater $\mathbf{x}$ ligger på $\ell_{\mathbf{y}}$ då och endast då $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$ dvs $\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0$. Bilden $Q = F_{\mathbf{A}}(P)$ har de homogena koordinaterna $\mathbf{Ax}$. Nu är

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Ax} = \mathbf{z}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{Ax}), \quad \text{om} \quad \mathbf{z} = (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{y}.$$

Därför är $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$ ekvivalent med $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{Ax}) = 0$. Men detta innebär $P \in \ell_{\mathbf{y}}$ då och endast då $Q \in \ell_{\mathbf{z}}$ dvs $F_{\mathbf{A}}(\ell_{\mathbf{y}}) = \ell_{\mathbf{z}}$. $\square$

Satsen ovan visar att begreppet projektiv linje är invariant under projektiva avbildningar. Det är lätt att övertyga sig om att begreppet skärningspunkt mellan linjer också är invariant (skärningspunkt avbildas på skärningspunkt). Även ordningsrelationer mellan punkter bevaras under projektiva avbildningar. Observera också följande viktiga sats (som inte gäller i den Euklidiska geometrin):

Sats 2

(a) Genom två olika projektiva punkter går precis en projektiv linje.

(b) På två olika projektiva linjer ligger precis en projektiv punkt.

Bevis: (a) Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vara homogena koordinater för två olika projektiva punkter. Detta innebär att $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är icke-parallella. Därför är $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Den projektiva linjen $\ell_{\mathbf{n}}$ går nu genom $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, ty $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$. Om en projektiv linje $\ell_{\mathbf{y}}$ går genom $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ måste $\mathbf{y} \cdot \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} = 0$, vilket ger $\mathbf{y} = \rho \mathbf{n}$. Detta innebär emellertid att $\ell_{\mathbf{y}} = \ell_{\mathbf{n}}$. Alltså följer (a).

(b) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är homogena koordinater för två olika projektiva linjer så är $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ icke-parallella. Att en projektiv punkt med homogena koordinater $\mathbf{x}$ ligger på båda dessa linjer är ekvivalent med att $\mathbf{x} = \rho \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Detta ger (b)

Låt oss ställa samman några av de hittills gjorda definitionerna.

$\mathbb{P}_2$ (projektiva planet)	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$
<u>begrepp</u>	<u>definition</u>	<u>koordinater</u>
punkt	stråle genom origo	$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ (riktningsvektor)
linje	plan genom origo	$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ (normal)
punkt i ∞	stråle i planet $x_3 = 0$	$\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$
linjen i ∞	planet $x_3 = 0$	$\mathbf{n} = (0, 0, 1)$
ändlig punkt	stråle som inte ligger i $x_3 = 0$	$(x_1, x_2, 1)$
transformation	bijektiv linjär avbildning	$\mathbf{x} \mapsto \rho \mathbf{A} \mathbf{x}$

Jämförelse mellan projektiva och Euklidiska linjer

Skärningspunkten mellan två projektiva linjer kan vara en punkt i oändligheten. Betrakta de båda projektiva linjerna

$$\ell_1 : a_1 x_1 + a_2 x_2 + b x_3 = 0$$

$$\ell_2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 + c x_3 = 0$$

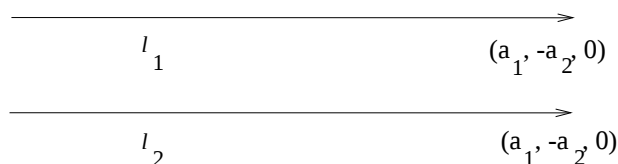
där $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, och $b \neq c$. Detta svarar mot två vanliga parallella linjer, men i det projektiva planet finns inga parallella linjer. Man kan då fråga sig var ℓ_1 och ℓ_2 skär varandra?

Svaret är enkelt! De skär varandra i en punkt i oändligheten. Ty om $\mathbf{x}$ är homogena koordinater för skärningspunkten är $\mathbf{x}$ ortogonal mot både (a_1, a_2, b) och (a_1, a_2, c) . Det innebär att $\mathbf{x}$ är proportionell mot

$$(a_1, a_2, b) \times (a_1, a_2, c) = (c - b)(a_2, -a_1, 0).$$

Skärningspunkten är alltså punkten i oändligheten $(a_2, -a_1, 0)$.

Analogt bestämmer en vanlig punkt och en punkt i oändligheten en entydigt bestämd projektiv linje.



Låt oss jämför det Euklidiska planet E med det projektiva planet $\mathbb{P}_2$.

Euklidiska planet

En linje har riktningsvektorn $\mathbf{v}$

Två linjer är parallella

Två linjer är icke-parallella

Projektiva planet

En linje går genom oändlighetspunkten i riktningen $\mathbf{v}$

Två linjer skär varandra i oändligheten

Två linjer skär varandra i en ändlig (vanlig) punkt.

Dualitet

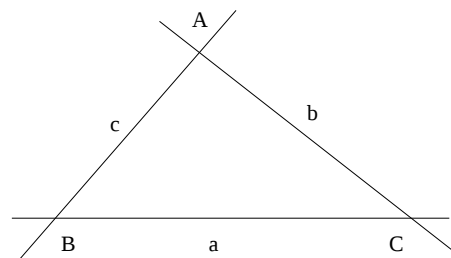
Observera de båda utsagorna

(a) genom två olika projektiva punkter går precis en projektiv linje.

(b) på två olika projektiva linjer ligger precis en projektiv punkt.

Om man i den första utsagan byter ut ordet "punkt" mot "linje" och ordet "linje" mot "punkt" och ersätter "går genom" med "ligger på", så får man den andra utsagan. Med samma byte får man den första utsagan ur den andra. Denna *dualitet* finns inbyggd redan i definitionen av projektiv linje, eftersom en vektor $\mathbf{x} \neq 0$ kan uppfattas antingen som homogena koordinater för en (projektiv) punkt eller för en linje.

Samma dualitet (utbytbarhet) finns i en triangel, (oavsett om den är en vanlig triangel eller en projektiv sådan). Antag att triangelns hörn är A, B, C och de linjer som sammanbinder hörnen är a, b, c . Vi kan då säga att A ligger på b och c och (dualt) att a går genom B och C .



Triangeln är en *självdual* figur dvs man kan byta ut "punkt" (hörn) mot "linje" (sammanbindningslinje), "linje" mot "punkt" och orden "ligger på" mot "går genom". Vi kan alltså tala om triangeln ABC lika väl som triangeln abc .

Låt oss peka på några andra duala samband.

- Mot origo med de projektiva koordinaterna $(0, 0, 1)$ svarar linjen i oändligheten med de projektiva koordinaterna $(0, 0, 1)$.
- En punkt $\mathbf{x}$ i oändligheten karakteriseras av att $x_3 = 0$, medan en linje ℓ_n genom origo uppfyller ekvationen $n_3 = 0$.
- Att tre projektiva punkter $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ligger på en projektiv linje är ekvivalent med

att $\det[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] = 0$, vilket dualt svarar mot att tre linjer $\ell_{\mathbf{n}_1}, \ell_{\mathbf{n}_2}, \ell_{\mathbf{n}_3}$ skär varandra i en punkt eller ekvivalent att $\det[\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{n}_3] = 0$.

Dubbelförhållandet

Projektiva avbildningar förändrar avstånd och vinklar. Det är uppenbart eftersom redan affina avbildningar gör det. Projektiva avbildningar förändrar även relativa avstånd mellan punkter på en linje. Det finns emellertid en dubbel avståndsrelation som är invariant, det s.k. *dubbelförhållandet*. Om A, B, C, D är fyra punkter på en linje i $\mathbb{R}^3$ definieras deras dubbelförhållande (A, B, C, D) genom

$$(2) \quad (A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DA}} : \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Om linjen där punkterna A, B, C, D ligger har riktningsvektorn $\mathbf{v}$ och

$$(3) \quad \overrightarrow{OA} = \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{x}_0 + \lambda_2 \mathbf{v}, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{x}_0 + \lambda_3 \mathbf{v}, \quad \overrightarrow{OD} = \mathbf{x}_0 + \lambda_4 \mathbf{v}$$

så är

$$(4) \quad (A, B, C, D) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Det är en bagatell att med hjälp av detta uttryck konstatera att dubbelförhållandet mellan fyra punkter på en linje i $\mathbb{R}^3$ inte ändras om man utför en bijektiv linjär funktion, dvs

$$(5) \quad (T(A), T(B), T(C), T(D)) = (A, B, C, D)$$

om T är en godtycklig bijektiv linjär avbildning. Om linjen där punkterna ligger inte är parallell med standardplanet $x_3 = 0$ och ingen av de givna punkterna ligger i detta plan, så kommer centralprojektionen $\mathcal{C}$ inte heller att påverka dubbelförhållandet. Under de beskrivna villkoren gäller alltså att

$$(6) \quad (\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(B), \mathcal{C}(C), \mathcal{C}(D)) = (A, B, C, D)$$

Det är en tämligen charmlös räkning att verifiera detta. Därför är det naturligt att definiera dubbelförhållandet i det projektiva planet $\mathbb{P}_2$ på samma sätt som ovan, (dvs med formlerna (2) och (4)). Särskilt formeln (4) är lämplig, ty denna kan användas för att beräkna dubbelförhållandet även om någon av punkterna är oändlighetspunkten på den givna projektiva linjen. Om till exempel B är punkten i oändligheten låter vi $\lambda_2 \rightarrow \infty$ i (6) och låter det uppkomna gränsvärdet $(\lambda_1 - \lambda_3)/(\lambda_1 - \lambda_4)$ definiera dubbelförhållandet (A, B, C, D) .

Sats 3 *Projektiva avbildningar lämnar dubbelförhållandet i det projektiva planet invariant. Om således A, B, C, D är fyra projektiva punkter på en projektiv linje och F är en projektiv avbildning, så gäller*

$$(F(A), F(B), F(C), F(D)) = (A, B, C, D)$$

Bevis: Låt F vara definierad av den bijektiva linjära avbildningen T på $\mathbb{R}^3$ och låt oss för enkelhets skull anta att A, B, C, D och dess bilder $F(A), F(B), F(C), F(D)$ alla är ändliga punkter. Vi kan då identifiera A, B, C, D med punkter i $\mathbb{R}^3$, vilka ligger på en linje i planet $x_3 = 1$. Då ligger $T(A), T(B), T(C), T(D)$ också på en linje i $\mathbb{R}^3$, men kanske inte i planet $x_3 = 1$. Punkterna $F(A), F(B), F(C), F(D)$ kan identifieras med centralprojektionerna av $T(A), T(B), T(C), T(D)$, dvs

$$F(A) = \mathcal{C}(T(A)), F(B) = \mathcal{C}(T(B)), F(C) = \mathcal{C}(T(C)), F(D) = \mathcal{C}(T(D))$$

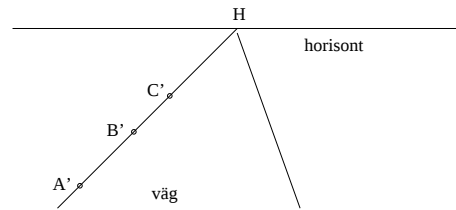
Således ger (6) att

$$(F(A), F(B), F(C), F(D)) = (\mathcal{C}(T(A)), \mathcal{C}(T(B)), \mathcal{C}(T(C)), \mathcal{C}(T(D))) = (T(A), T(B), T(C), T(D))$$

Med hjälp av formel (5) följer nu resultatet.

Exempel 1 Låt oss ta ett exempel på en användning av dubbelförhållandet.

Framför oss ligger en slätt. En rak väg leder bort mot horisonten. Vid vägkanten ser vi tre stenar A, B, C . Vi vet att det exakta avståndet mellan A och B är 2 km och vi vill veta avståndet x mellan B och C . Till vårt förfogande står ett fotografi, tagit med en kamera av det oförtjänt okända märket *CP-exacta* (som tar centralperspektiviskt exakta foton).



Genom att mäta på bilden finner vi att avstånden i bilden är $A'B' = 1\text{cm}$, $B'C' = 0.7\text{cm}$ och $C'H = 1.2\text{cm}$. Här är H flyktpunkten dvs bilden av punkten D i oändligheten i den verkliga vägens riktning. Nu ger formeln för dubbelförhållandet (2) att

$$(A, B, C, D) = \frac{2+x}{x}$$

$$(A', B', C', H) = \frac{1.0 + 0.7}{1.0 + 0.7 + 1.2} : \frac{0.7}{0.7 + 1.2} = 1.59$$

Enligt formeln (6) är dessa två dubbelförhållanden lika, vilket ger

$$\frac{2+x}{x} = 1.59$$

varav $x = 3.38$. Därmed har vi funnit det sökta avståndet.

Analys av projektiva avbildningar

Vi skall titta lite närmare på hur projektiva transformationer ser ut. Låt P ha homogena koordinater $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Då har dess bild $Q = F_{\mathbf{A}}(P)$ de homogena koordinaterna $\mathbf{Ax}$ men också de homogena koordinaterna $\mathbf{y} = \rho\mathbf{Ax}$, ($\rho \neq 0$). Om elementen i matrisen $\mathbf{A}$ är a_{rk} så är tydligen

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = \rho(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ y_2 = \rho(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ y_3 = \rho(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases}$$

Låt oss först anta att P är en vanlig punkt i $\mathbb{P}_2$, dvs att $x_3 \neq 0$. Vi identifierar då P med punkten $(\xi_1, \xi_2, 1)$ där $\xi_1 = x_1/x_3, \xi_2 = x_2/x_3$. Om dessutom Q är en vanlig punkt, dvs $y_3 \neq 0$, så identifierar vi Q med punkten $(\eta_1, \eta_2, 1)$, där $\eta_1 = y_1/y_3, \eta_2 = y_2/y_3$. Eftersom

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 = x_3(a_{r1}\xi_1 + a_{r2}\xi_2 + a_{r3})$$

får vi sambandet

$$(2) \quad \begin{cases} \eta_1 = \frac{a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}}{a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}} \\ \eta_2 = \frac{a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}}{a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}} \end{cases}$$

Observera att vårt antagande att $y_3 \neq 0$ innebär att nämnaren $a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33} \neq 0$. Om $y_3 = 0$ så är Q punkten i oändligheten med koordinater $(\eta_1, \eta_2, 0)$ där $\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}, \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}$.

Vi tar nu fallet att P är en punkt i oändligheten, ($x_3 = 0$). Om P är punkten i oändligheten med koordinater $(\xi_1, \xi_2, 0)$, och $a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 \neq 0$ så är Q punkten med koordinater $(\eta_1, \eta_2, 1)$, där

$$\eta_1 = \frac{a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2}{a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2}, \eta_2 = \frac{a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2}{a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2}.$$

Slutligen, om $a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 = 0$ så är Q punkten i oändligheten med koordinaterna $(\eta_1, \eta_2, 0)$ där

$$\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2.$$

Av uttrycket (2) ser vi att gruppen av projektiva transformationer omfattar gruppen av affina transformationer. Ty om $a_{31} = a_{32} = 0$ och (för enkelhets skull) $a_{33} = 1$ ger (2) att

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13} \\ \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23} \end{cases}$$

Avbildningen $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\eta_1, \eta_2)$ är således affin i detta fall. Men gruppen av projektiva transformationer innehåller många andra (och mer komplicerade) transformationer än de affina. Den projektiva geometrin kan därför ses som överordnad den affina geometrin.

I affin geometri kan man avbilda en godtycklig triangel i en annan triangel (se lemma 3 i kapitlet om plana geometrier). Följande sats visar att man i den projektiva geometrin kan avbilda en godtycklig fyrhörning i en annan fyrhörning. (Däremot är exempelvis rektanglar inte projektivt invarianta, eftersom varken avstånd eller vinklar är det.)

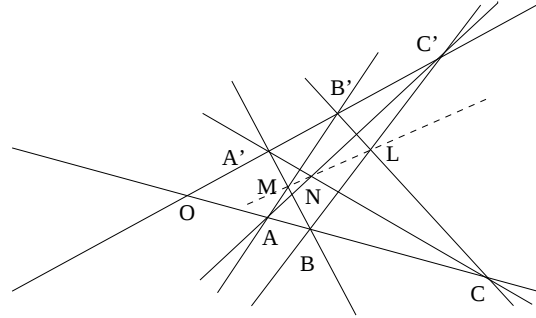
Sats 4 (Fundamentalsatsen för projektiva avbildningar)

Om A, B, C, D och A', B', C', D' är två uppsättningar av fyra sinsemellan olika projektiva punkter, varav inte tre ligger på en projektiv linje, så finns en entydigt bestämd projektiv avbildning T som avbildar A på A' , B på B' , C på C' och D på D' .

Vi ger ett bevis av denna sats nedan. Först kommer ett exempel på en användning.

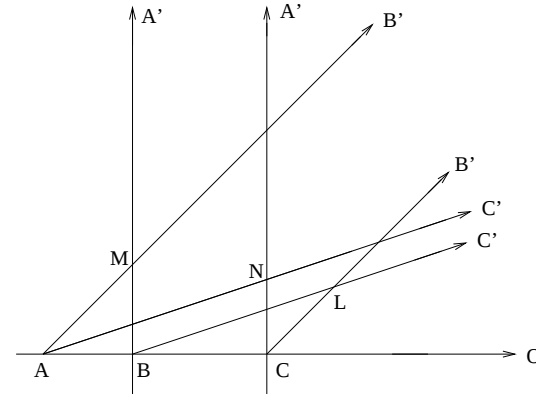
Exempel 2 Det finns en klassisk sats som kallas Pappus sats. Den handlar om två linjer ett två uppsättningar A, B, C och A', B', C' på var sin linje.

Dessa punkter förenas med linjer som figuren visar. Pappus sats säger att de tre skärningspunkterna M , (skärningspunkt mellan linjerna $A'B$ och AB'), N (mellan linjerna $C'A$ och AC') och L (mellan $B'C$ och $C'B$) ligger på en rät linje (streckad i figuren).



För att bevisa denna sats avbildar vi de fyra punkterna O, A, M, A' på fyra punkter, så att O avbildas på punkten i oändligheten i riktningen $(1, 0)$, A' avbildas på punkten i oändligheten i riktningen $(0, 1)$, medan M avbildas på den vanliga punkten $(0, 1)$ och A avbildas på den vanliga punkten $(-1, 0)$. Då kommer linjen genom A', B', C' att avbildas på linjen genom oändligheten. Figuren nedan visar hur situationen nu ser ut.

Eftersom B är skärningspunkt mellan linjerna OA och $A'M$ måste $B = (0, 0)$. Eftersom B' ligger på linjen AM måste B' vara punkten i oändligheten i riktningen $(1, 1)$. Punkten C ligger på linjen AB så att $C = (c, 0)$. Låt vidare C' vara punkten i oändligheten i riktningen (a, b) . Man kan nu finna koordinaterna för N (som ju är skärningspunkt mellan linjerna AC' och CA') och L (skärningspunkt mellan BC' och $B'C$).



Man får att $N = (-1, 0) + t(a, b) = (c, 0) + s(0, 1)$, vilket först ger $-1 + at = c, bt = s$ och sedan

$$N = (c, \frac{b}{a}(c + 1))$$

På samma sätt får man $L = t(a, b) = (c, 0) + s(1, 1)$, vilket ger

$$L = \frac{c}{a - b}(a, b)$$

Detta ger till slut att

$$\overrightarrow{MN} = (c, \frac{bc + b - a}{a}), \quad \overrightarrow{ML} = (\frac{ac}{a - b}, \frac{bc + b - a}{a - b}) = \frac{a}{a - b} \overrightarrow{MN}$$

Detta visar att M, N, L ligger på en linje.

Bevis: (av fundamentalsatsen för projektiva avbildningar.)

Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ och $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{d}'$ vara de homogena koordinaterna för A, B, C, D resp. A', B', C', D' . Eftersom A, B, C inte ligger på en (projektiv) linje, så ligger $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ inte i ett plan. Varje vektor kan därför skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Vi kan till exempel skriva $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Här är alla talen α, β, γ alla skilda från noll. Ty om exempelvis $\alpha = 0$ så ligger $\mathbf{d}$ i det plan som spänns upp av $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$, vilket innebär att de projektiva punkterna D, B, C ligger på en linje, något som är uteslutet i förutsättningarna. Det följer att matrisen $[\alpha\mathbf{a} \ \beta\mathbf{b} \ \gamma\mathbf{c}]$ är inverterbar.

Analogt kan vi skriva $\mathbf{d}' = \alpha'\mathbf{a}' + \beta'\mathbf{b}' + \gamma'\mathbf{c}'$, där alla talen α', β', γ' . Sätt nu

$$\mathbf{M} = [\alpha'\mathbf{a}' \ \beta'\mathbf{b}' \ \gamma'\mathbf{c}'] [\alpha\mathbf{a} \ \beta\mathbf{b} \ \gamma\mathbf{c}]^{-1}$$

och låt F vara motsvarande projektiva avbildning. Eftersom

$$\mathbf{M}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha'\mathbf{a}', \quad \mathbf{M}(\beta\mathbf{b}) = \beta'\mathbf{b}', \quad \mathbf{M}(\gamma\mathbf{c}) = \gamma'\mathbf{c}'$$

så gäller $F(A) = A', F(B) = B', F(C) = C'$. Vidare är

$$\mathbf{M}(\mathbf{d}) = \mathbf{M}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \alpha'\mathbf{a}' + \beta'\mathbf{b}' + \gamma'\mathbf{c}' = \mathbf{d}'$$

Således gäller även att $F(D) = D'$. Därmed är existensen visad.

Antag nu att F_1 och F_2 är två avbildningar med satsens egenskaper. Sätt då $F = F_1 \circ F_2^{-1}$. Då avbildar F punkterna A, B, C, D på sig själva. Om F ges av matrisen $\mathbf{M}$ så finns tal p, q, r, s så att

$$\mathbf{M}(\mathbf{a}) = p\mathbf{a}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{b}) = q\mathbf{b}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{c}) = r\mathbf{c}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{d}) = s\mathbf{d}$$

Om nu $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ så ger sambandet $\mathbf{M}(\mathbf{d}) = s\mathbf{d}$ att

$$p\alpha\mathbf{a} + q\beta\mathbf{b} + r\gamma\mathbf{c} = s\alpha\mathbf{a} + s\beta\mathbf{b} + s\gamma\mathbf{c}$$

Detta ger $p = q = r = s$. Därför är $\mathbf{M} = s\mathbf{I}$, vilket ger att F är identitetsavbildningen dvs $F_1 = F_2$.