

Om brutna derivator

Jörgen Löfström

En konkret fråga

Vad är halva derivatan av $\sin(\sqrt{x})$? I formler alltså

$$\text{Vad är } D^{1/2} \sin(\sqrt{x})?$$

Läsaren kanske vill svara med en rad motfrågor.

“Varför halva derivator? Har man någon nytta av det?”

“Vad då halva derivator, vad är det för något?”

“Varför just $\sin(\sqrt{x})$?”

Den sista frågan oroar mig minst. För mig är $\sin(\sqrt{x})$ bara ett exempel på en hyggligt enkel funktion. Ta gärna en annan! Den andra frågan är just vad denna text handlar om. Den första frågan kommer endast delvis att besvaras och svaret kommer att ges i portioner. Till en början nöjer jag mig med att ge ett personligt färgat delsvar.

Räknandets glädje

En student på en av våra grundkurser sökte härom året upp mig. Han frågade om jag visste hur man skulle räkna ut halva derivatan av någon funktion. Kanske var det just funktionen $\sin(\sqrt{x})$. Studenten satte igång att räkna på tavlan och jag tittade faderligt men avvaktande på. Rätt snart såg jag att det han hade funderat ut var både smart och intressant. Jag erinrade mig dessutom att jag faktiskt ägnat en stor del av min tid som matematiker åt både halva och trefjärdedels derivator, även om jag inte funnit någon anledning att explicit räkna ut dem. Studentens ögon lyste av entusiasm, medan han fyllde tavlan. Han behövde uppenbarligen inte någon särskild motivering för att beräkna halva derivator.

Så här berättar författaren Willy Kyrklund i boken Mästaren Ma:

Matematiken skall ha upptäckts av en tillfällighet. En furste önskade veta storleken på sina domäner. Han sände iväg en hovman att ta reda på saken. När hovmannen kom tillbaka och avlade rapport, nämnde han samtidigt hur han gått tillväga. Fursten blev förtjust. Han sade : räkna ut något annat åt mig, vad som helst. Hovmannen gick bort och fann på något annat och räknade ut det. Fursten blev ytterligare förtjust och sade : räkna ut ännu något annat åt mig, sak samma vad, någonting som du kan finna på. Därmed var matematiken upptäckt.

Matematik handlar nog inte enbart om att räkna ut det ena och det andra. Det handlar också om att identifiera viktiga begrepp, sätta ord på dem, en slags

språkutveckling kan man kanske säga. Men Kyrklunds historia har onekligen en poäng. Mycket av matematiken består i att räkna ut det som går att räkna ut, och dessutom finna glädje i det.

Ett första misslyckande

Hur skall vi nu bära oss åt för att beräkna $D^{1/2} \sin(\sqrt{x})$? I våra vanliga läroböcker börjar man oftast med en ordentlig definition. Men definitioner kommer någonstans ifrån. Man kan inte definiera begreppet kontinuitet eller slutna mängd hur som helst. En definitionerna uttrycker en erfarenhet, en insikt om vad som är rimligt och väsentligt. Det är detta som ger matematikens definitioner deras magiska kraft. Med rätt definition kan även komplicerade sammanhang bli enkla. Men hur skall vi avgöra vad som är en rimlig definition av halv derivata? Vi får göra ett försök rakt ut i luften så får vi se var vi hamnar.

Den vanliga derivatan $Df(x)$ av en funktion $f(x)$ definieras ju som följande gränsvärde:

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Kunde vi då inte definiera halva derivatan av som gränsvärdet

$$D^{1/2} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^{1/2}}$$

Jovisst, varför inte. I ett avseende är detta en bra definition. Den medför nämligen att varje deriverbar funktion också har en halv derivata. Om f är deriverbar så blir

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h^{1/2}} &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{1/2} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{1/2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \cdot Df(x) = 0 \end{aligned}$$

Därmed skulle alltså $D^{1/2} \sin(\sqrt{x}) = 0$. Enkelt men trots allt inte alls bra, ty rimligen borde halva derivatan av halva derivatan vara hela derivatan. I formelspråk alltså:

$$D^{1/2} D^{1/2} f(x) = Df(x) \tag{1}$$

Men då blir

$$D \sin(\sqrt{x}) = D^{1/2} D^{1/2} \sin(\sqrt{x}) = D^{1/2} 0 = 0$$

Detta ger alltså fel resultat. Vår ansats har misslyckats kapitalt. Ändå tycker man ju att det borde ligga något i vårt försök. Vi får väl se.

En liten framgång

Vårt första försök att definiera halv derivata har nu strandat, men vi står inte längre tomhänta. Vi har ett misslyckande att utgå ifrån. Och vi har faktiskt en idé. Den uttrycks i formeln (1). Lite generellare skulle vi kunna skriva

$$D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x) \tag{2}$$

Här skall då D^α beteckna den brutna derivatan av ordningen α . Det är alltså meningen att α skall vara ett godtyckligt reellt tal, eller i varje fall ett godtyckligt

positivt reellt tal. Definitionen av brutna derivator bör göras så att formeln (2) gäller. Dessutom bör $D^\alpha f(x)$ stämma överens med den vanliga n -te derivatan om $\alpha = n$, ett positivt heltal. Detta skall vi använda för att testa rimligheten i framtida definitioner.

Jag föreslår nu att vi avvaktar med den generella definitionen av bruten derivata. Låt oss i stället leka med formeln (2) och se vad vi kan åstadkomma med den. Låt oss också välja en enklare funktion än $\sin(\sqrt{x})$, till exempel x^p . Vi skall alltså försöka beräkna $D^\alpha x^p$. Om $\alpha = n$ är ett positivt heltal så vet vi vad svaret skall bli, nämligen en konstant gånger x^{p-n} . Närmare bestämt vet vi ju att

$$D^n x^p = p(p-1) \cdots (p-n+1)x^{p-n}$$

Med hjälp av den så kallade gamma-funktionen Γ kan vi skriva

$$D^n x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} x^{p-n} \quad (3)$$

Information om gamma-funktionen kan man exempelvis finna i den utmärkta uppslagsboken Beta. Viktigast för oss är att veta att $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ och (längre fram) att $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Utgående från formeln (3) är det naturligt att definiera $D^\alpha x^p$ genom att sätta

$$D^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha} \quad (4)$$

Det är då lätt att visa att

$$D^{\alpha+\beta} x^p = D^\alpha D^\beta x^p$$

Dessutom kommer $D^\alpha x^p$ att stämma överens med den vanliga n -te derivatan om $\alpha = n$ (ett positivt heltal).

Några märkliga formler

Ett par specialfall av formeln (4) kan vara trevliga att se innan vi går vidare i vår diskussion:

$$\begin{aligned} D^{1/2} x &= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ D^{1/2} 1 &= \frac{1}{\sqrt{(\pi x)}} \\ D^{-1/2} 1 &= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \end{aligned}$$

Observera att vi fortfarande inte har en allmän definition av brutna derivator, men vi är faktiskt i stånd att besvara frågan "vad är halva derivatan av $\sin(\sqrt{x})$ ". Om vi nämligen utvecklar sinus-funktionen i Maclaurin-serie och sätter in $\sqrt{x}$ som variabel så får vi

$$\sin(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{k+1/2}$$

Låt oss nu halv-derivera termvis. Formeln (4) ger att

$$D^{1/2} x^{k+1/2} = \frac{\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(k+1)} x^k$$

Sätter man in detta i den termvis halv-deriverade serien så får man efter en del förenklingar följande märkliga resultat

$$D^{1/2} \sin(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} J_0(\sqrt{x})$$

Här är J_0 Besselfunktionen av ordningen noll. (Se Beta.) Andra märkliga formler som låter sig härledas med hjälp av (nästan) enbart (4) är

$$D^{1/2} e^x = \frac{1}{\sqrt{(\pi x)}} + e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x})$$

Problemlösandets mödor

Låt oss lämna dessa speciella kalkyler och i stället titta tillbaka på våra beräkningar. Till en början gjorde vi en förenkling genom att vi valde att arbeta med funktionen x^p och inte den mer komplicerade funktionen $\sin(\sqrt{x})$, men vi lyckades ändå till slut finna den halva derivatan av den senare funktionen. Detta är ett exempel på en ofta framgångsrik problemlösningsmetod: Lös ett enklare fall först, eller lös ett annat relaterat problem! Men vi gjorde också en annan sak. I stället för att nöja oss med att beräkna halva derivator gick vi över till generella brutna derivator och det var genom denna övergång som det blev tydligt hur vi skulle definiera även halva derivatan. Detta är alltså den motsatta metoden, lösning genom generalisering: Om du inte kan lösa ditt konkreta problem, sätt in det i en lämplig (där sitter det!) allmänare ram och lös ett generellare problem. Denna senare problemlösningsmetod brukar inte framhållas, men jag har funnit den användbar många gånger.

Omväg till målet

I våra vanliga analyskurser lär vi ut att det finns ett intimt samband mellan derivator och integraler. Integration kan ses som en invers operation till derivation. Tänker vi oss nu brutna derivator så kunde vi också tänka oss brutna integraler. Om vi kan hitta en vettig definition av brutna integraler kunde vi sedan definiera brutna derivator som någon slags invers operation.

Låt oss sätta

$$Ig(x) = \int_a^x g(y) dy$$

Om $f(a) = 0$ så har vi enligt integralkalkylens huvudsats att

$$f(x) = \int_a^x Df(y) dy = IDf(x)$$

Detta kan tolkas så att integration är invers operation till derivation (eller tvärtom om man så önskar). I formler alltså $I = D^{-1}$ (eller $D = I^{-1}$). I samband med beviset av Taylors formel itererar man som bekant denna formel. Om man antar att

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

så gäller

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-y)^{n-1} D^n f(y) dy = I^n D^n f(x)$$

där

$$I^n g(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-y)^{n-1} g(y) dy$$

Ersätter vi här heltalet n med ett godtyckligt reellt tal α så får vi en tänkbar definition av bruten integral, alltså

$$I^\alpha g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} g(y) dy \quad (5)$$

Om vi nu tänker på I^α som en negativ derivata, $I^\alpha = D^{-\alpha}$, så skulle vi kunna skriva

$$D^\alpha f(x) = D^m D^{\alpha-m} f(x) = D^m I^{m-\alpha} f(x) \text{ om } m-1 \leq \alpha < m.$$

Vi skulle med andra ord få formeln

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^x (x-y)^{m-\alpha-1} f(y) dy$$

En irriterande detalj i denna formel är att den beror på den undre integrationsgränsen a . Därför bör vi markera detta beroende i vårt val av beteckning. Vi gör nu följande definition.

Antag att $-\infty \leq a \leq \infty$ och låt α vara ett positivt reellt tal. Antag att m är ett heltal så att $m-1 \leq \alpha < m$. Den brutna derivatan $D_a^\alpha f(x)$ av en funktion definieras då genom formeln

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} D^m \int_a^x (x-y)^{m-\alpha-1} f(y) dy \quad (6)$$

under förutsättning höger led existerar.

Denna definition härstammar från 1800-talet (Liouville, Riemann).

Om tillräckligt många av f 's derivator försvinner i punkten a , så gäller formeln

$$D_a^{\alpha+\beta} f(x) = D_a^\alpha D_a^\beta f(x)$$

(Läsaren uppmanas att göra ett försök att visa denna formel! Använd partiell integration, omkastning av integrationsordningen och Betas formler för gamma-funktionen.) Vidare gäller att

$$D_0^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}$$

Vår definition har därför de egenskaper som vi har resonerat oss fram till tidigare, bortsett då från komplikationen att vi måste specificera en viss punkt a i definitionen och dessutom anta att funktionen och dess derivator upp till en viss lämplig ordning måste vara noll i denna punkt.

En blick tillbaka

Låt oss koncentrera oss på fallet $0 < \alpha < 1$. Då ger definitionen att

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D \int_a^x (x-y)^{-\alpha} f(y) dy$$

Av denna formel ser man att värdet av $D_a^\alpha f(x)$ inte bara beror på hur f ser ut i närheten av punkten x . Värdet beror uppenbarligen på funktionens värden i hela intervallet (a, x) . Ändrar man f till exempel i närheten av punkten a , så kommer $D_a^\alpha f(x)$ att ändras. Detta beteende skiljer sig helt från den vanliga derivatans uppträdande. En ändring av funktionens värden i närheten av en punkt a ändrar inte derivatans värde i en annan punkt x . Derivatans mäter ju hur mycket funktionen varierar i punkten x . Man brukar uttrycka detta genom att säga att derivation är en lokal operation. Men brutna derivation är tydligen inte en lokal operation. Men vad handlar då brutna derivation om? Följande resultat ger en viss information.

Först omvandlar jag formeln ovan genom att integrera partiellt (under antagandet att $f(a) = 0$)

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-y)^{-\alpha} Df(y) dy$$

Jag väljer $a = -\infty$, eftersom budskapet blir tydligast då. Då gäller

Om $0 < \alpha < 1$ så gäller

$$D_{-\infty}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-h)}{h^\alpha} \frac{dh}{h}$$

(För att visa formeln börja med att använda integralkalkylens huvudsats och skifta sedan integrationsordning.)

Formeln visar att existensen av den brutna derivatan $D_{-\infty}^\alpha f(x)$ för det första kräver att differenskvoten

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h^\alpha}$$

skall tåla att integreras mot måttet dh/h i närheten av $h = 0$. Detta är ett regularitetskrav, som liknar kravet på deriverbarhet i punkten x , men är svagare eftersom $0 < \alpha < 1$. (Man påminner sig här det inledande misslyckandet. Idén har här återuppstått i en ny och oväntad form!) Men detta krav räcker inte, ty man skall integrera över hela intervallet $(0, \infty)$. Detta kräver att $f(x-h)$ inte blir för stor då $h \rightarrow \infty$. För att den brutna derivatan $D_{-\infty}^\alpha f(x)$ skall existera krävs således dels en lokal regularitet i punkten x , dels en global begränsning, d.v.s. ett begränsningsvillkor på funktionen f över hela intervallet $(-\infty, x)$.

En andra väg

Vår definition av brutna derivator visade sig mer komplicerad än vi kanske väntade oss. Den har också andra nackdelar. Antag att vi är intresserade av periodiska funktioner. Då vill vi nog gärna att den halva derivatan av en periodisk funktion

skall vara periodisk, men $D_0^{1/2}1$ är inte periodisk trots att den konstanta funktion 1 är det. Men om vi arbetar med periodiska funktioner har vi ett fantastiskt hjälpmedel till förfogande, nämligen Fourier-serier. Kanske kan man finna en annan definition av brutna derivator med hjälp av sådana serier. Plats för en ny undersökning. Antag alltså att vi har en 2π -periodisk funktion f med Fourier-serien

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Deriverar vi termvis får vi

$$D^n f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^n c_k e^{ikx}$$

I samma anda som tidigare definierar vi nu

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^\alpha c_k e^{ikx}$$

Man måste då göra klart för sig vad man menar med $(ik)^\alpha$, men det är inget större bekymmer. Använder vi oss av någon elementär lärobok om analytiska funktioner får vi följande definition

$$(ik)^\alpha = |k|^\alpha e^{\pi i \alpha \operatorname{sign}(k)/2}$$

Nu gäller uppenbarligen att $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ och den brutna derivationen överensstämmer med den vanliga derivationen ifall α är ett positivt heltal. Därför är denna idé lika god som någon annan, ja faktiskt bättre eftersom en periodisk funktion uppenbarligen får periodiska brutna derivator. Problemet med denna andra definition är att det blir ganska knepigt att beräkna den brutna derivatan av en given funktion. Definitionen ovan härstammar från vårt århundrade (Zygmund, 1935). Låt oss kalla denna derivata för Zygmund-derivatan.

Observera den lockande möjligheten att definiera andra sorts derivator än brutna, till exempel

$$|D|f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |ik| c_k e^{ikx}$$

eller allmänare

$$\Phi(D)f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(ik) c_k e^{ikx}$$

Här är Φ en funktion definierad på imaginära axeln. Exempelvis får man

$$e^{tD}f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{tik} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik(x+t)} = f(x+t)$$

Denna linje i diskussionen skall vi dock inte följa vidare.

Samband som gör två till ett

Vi har nu två definitioner av bruten derivata som ser helt olika ut. Men det finns ett samband.

Om

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

så gäller

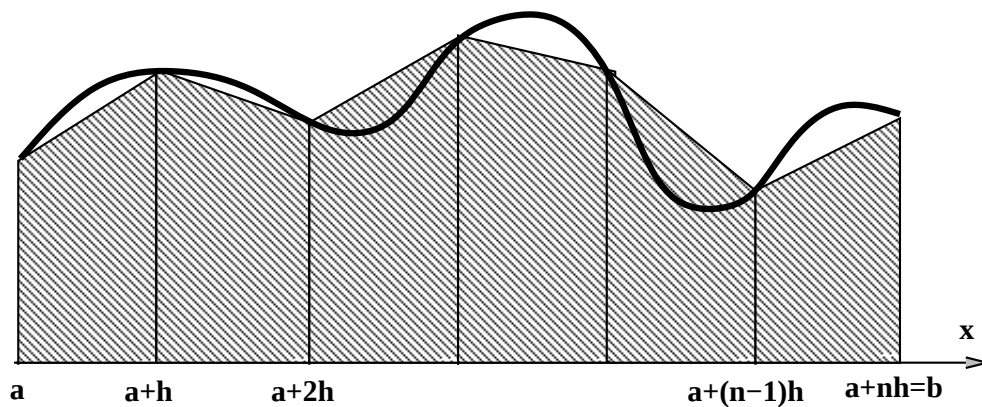
$$D_{-\infty}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} c_k e^{ikx}$$

om denna serie är absolutkonvergent.

Detta innebär att Riemann-Liouville-derivatan $D_{-\infty}^{\alpha}$ stämmer överens med Zygmund-derivatan som vi definierade i föregående avsnitt. (För att visa likheten ovan, börja med vänster led. Stoppa in Fourierserien för f , skifta ordning mellan summation och integration. Byt därefter variabel i integralen och beräkna den. Räkningarna har sina finesser, med det går!)

En nytt synsätt

Jag skulle nu vilja avsluta med att berätta om situationer liknande dem där jag har behövt brutna derivator. Låt mig ta ett konkret exempel. Om man vill numeriskt beräkna en integral över ett begränsat intervall kan man exempelvis tillgripa trapetsformeln.



Låt nu $T(h)$ vara arean av figurens parallelltrapetser och låt $E(h)$ vara det absoluta felet i trapetsformeln, det vill säga

$$E(h) = \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right|$$

Då gäller

$$E(h) \leq kh^2 M_2$$

där k är en konstant (se Beta) och

$$M_2 = \max |f''(x)|$$

Detta är utmärkt om f har en begränsad andraderivata, med hur ser feluppskattningen ut om f inte är riktigt så reguljär och vad skall man i så fall mena med “inte riktigt så reguljär”. Jo, det kunde ju betyda att f har en begränsad bruten derivata av ordning lite mindre än 2. Men i just ett sådant här sammanhang behöver man faktiskt inte insistera på en exakt definition av bruten derivata. Det räcker med att definiera vad man vill mena med “bruten regularitet”. I samband med trapetsformeln kan man till exempel visa följande.

Om

$$\frac{|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|}{h^\alpha} \leq M_\alpha \quad (7)$$

så gäller feluppskattningen

$$E(h) \leq kh^\alpha M_\alpha$$

(Här är α ett tal mellan 0 och 2.)

Villkoret (7) definierar inte någon bruten derivata, men det definierar en slags bruten regularitet. Observera att om $\alpha = 2$ så kommer vänster led i (7) att konvergera mot $f''(x)$. Om $\alpha < 2$ så innebär villkoret (7) ett svagare krav på funktionen än att andra-derivatan är begränsad, alltså en slags “bruten regularitet”. (Man säger ibland att f uppfyller ett Zygmund-villkor av ordningen α .)

Om man sysslar med kvadratisk integrerbara periodiska funktioner kan man på liknande sätt definiera “bruten regularitet”, exempelvis på följande sätt. Sätt

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Enligt Parsevals formel har vi då att

$$\|f\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|c_k|)^2 \right)^{1/2}$$

Man introducerar sedan en skala av normer genom formeln

$$\|f\|_\alpha = \|D^\alpha f\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|^\alpha |c_k|)^2 \right)^{1/2}$$

Att en funktion f har den brutna regulariteten α får då betyda att $\|f\|_\alpha$ är ändligt, (d.v.s. att $D^\alpha f$ är kvadratisk integrerbar). Observera att ju större värde på α man väljer desto snabbare måste Fourier-koefficienterna c_k gå mot noll. Det innebär i sin tur att f :s regularitet ökar.

Avslutning

Riemann-Liouilles definition av brutna derivator förekommer i olika varianter också i modern matematik till exempel i operator-teori. Man kan läsa om detta i Yosidas bok “Functional analysis”. Zygmunds definition förekommer i många varianter i samband med olika transformer, (Fouriertransformen i synnerhet) eller allmänna egenfunktionsutvecklingar. Mitt eget intresse för brutna derivator kommer från den funktionalanalytiska teori som brukar kallas interpolationsteori, en teori som har en av sina viktigare tillämpningar på approximationsteori (feluppskattningar till exempel).

Litteratur

Råde,Westergren : BETA,Mathematics Handbook, Studentlitteratur, 1990

Yosida : Functional Analysis, Springer, 1966

Zygmund : Trigonometric Series, Cambridge University Press, 1988

Oldham,Spanier : Fractional Calculus, Academic Press, 1974

I denna bok formligen vältrar man sig i formler för brutna derivator.