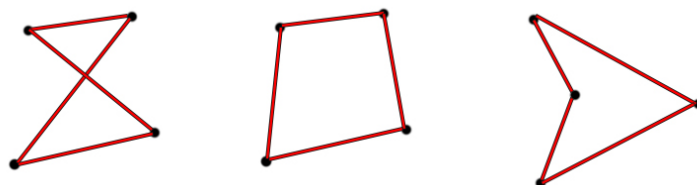


Om plattor och polygoner

Polygoner

En månghörning definieras av ett antal *hörn*, dvs punkter i planet och lika många sammabindningslinjer mellan dem. Sammanbindningslinjerna får bara mötas i hörnen och de skall tillsammans bilda en sluten kurva, månghörningens *rand*. Sammanbindningslinjerna mellan hörnen kallas *sidor*. Vi kommer bara att arbeta med *konvexa* månghörningar, vilket betyder att alla punkter på linjestycket mellan två punkter på randen ligger på eller innanför randen. En konvex månghörning kallas en *polygon*. Några figurer får belysa terminologin:

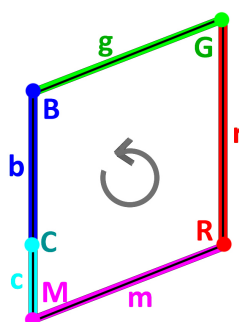


I de tre figurerna finns fyra punkter markerade och fyra sammanbindningslinjer (röda). Den första figuren är inte en fyrhörning, eftersom två sammanbindningslinjer skär varandra i en femte punkt. Den andra figuren visar en konvex fyrhörning. Den tredje figuren visar en fyrhörning som inte är konvex, eftersom linjestycket mellan de två vänstra hörnen inte ligger på eller helt innanför randen.

Plattor

En *platta* (eng: *tiling*) är en konvex polygon. Den har alltså ett visst antal hörn och lika många sidor. En platta har också ett antal *fästpunkter* (eng: *vertex*) och ett lika stort antal *kantar* (eng: *edge*). Varje hörn är en fästpunkt. En kant är en del av en sida som sammanbinder två fästpunkter på sidan.

Vi kommer att beteckna fästpunkterna med stora bokstäver som väljs efter vilken färg som vi använder för att markera fästpunkterna, t.ex. R för en röd fästpunkt eller C för en fästpunkt med färgen cyan. Det kommer inte att behövas mer än 6 fästpunkter, dvs maximalt R, G, B, C, M, Y (röd, grön, blå, cyan, magenta och gul). Kanterna betecknas med små bokstäver. Den som börjar i punkten R och slutar i G betecknas med r osv. Vi illustrerar med en parallellogram med fem fästpunkter.



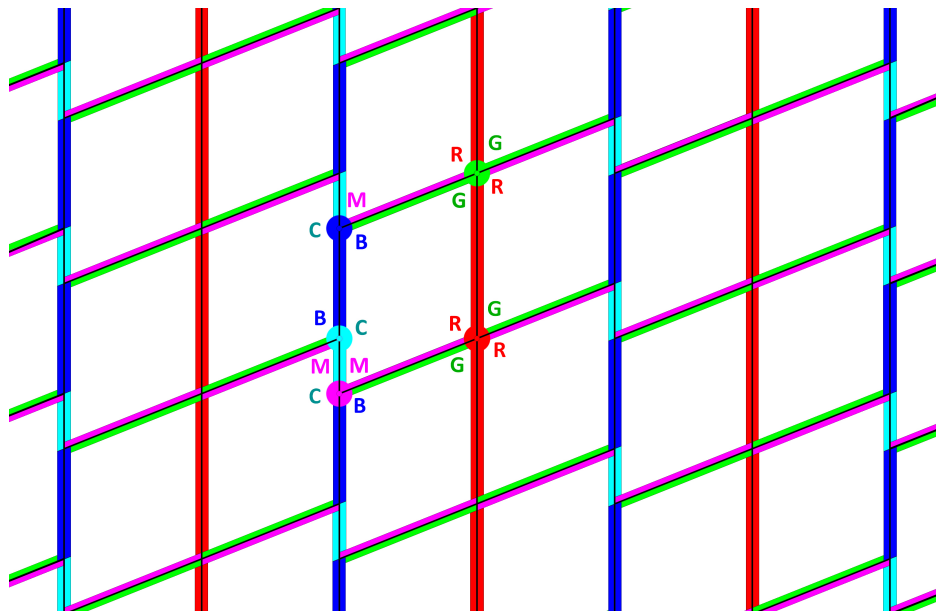
Vinkeln vid en fästpunkt betecknas med kursiverad bokstav. Vinkeln vid punkten R betecknas alltså *R*. I parallellogrammen ovan har vi alltså att

$$R + G = 180^\circ, C = 180^\circ, B = R, M = G, \text{ och } b + c = r, m = g \quad (1)$$

Fästpunkterna tas alltid i samma ordning, nämligen R, G, B, C, M, Y. Den cirkelformade pilen vill visa att randen är orienterad moturs (s.k. positiv orientering).

Planfyllande plattor

Plattan ovan har en intressant egenskap. Om man har ett obegränsat antal kopior av denna platta kan man nämligen täcka hela planet genom att foga ihop plattkopiorna med varandra i plattornas fästpunkter. Plattorna får roteras hur som helst och även vändas upp och ned, men plattorna måste fästas i varandra i fästpunkterna och ligga kant vid kant. Här en bild som visar hur det går till med just denna platta,



Som synes fästs punkterna R och G vid varandra, liksom punkterna B, C och M. Låt oss notera hur dessa punkter fästs vid varandra genom att helt enkelt skriva (R,G), (B,C,M). Dessutom ligger angränsande plattors kanter intill varandra. Exempelvis ligger kanter g intill kanten m, medan kanterna r, b och c ligger intill samma kanter. Vi noterar detta genom att skriva (r), (g,m), (b), (c).

En polygon som har egenskapen att dess kopior kan täcka hela planet på ovan beskrivna sätt kallas **planfyllande**.

I exemplet ovan kan man ändra proportionerna så länge som villkoren (1) ovan är uppfyllda. Man kan exempelvis ändra vinkeln i fästpunkten R, om man samtidigt ändrar vinklarna i G, B och M. Man kan också ändra kantlängderna. Är bara villkoren (1) uppfyllda kommer plattan fortfarande att vara planfyllande.

Olika typer av planfyllande plattor

Det finns många olika typer av planfyllande plattor. Men om man bortser från detaljer som exakta vinkelstorlekar och exakta kantlängder kan man dela upp planfyllande plattor i fyra grundkategorier och inom varje kategori finns bara ett begränsat antal typer. Det finns 14 typer av planfyllande plattor baserade på trianglar, 56 typer baserade på konvexa tetragoner, 24 typer baserade på konvexa femhörningar (pentagoner) samt 13 typer baserade på konvexa sexhörningar (hexagoner). Det finns inga planfyllande konvexa månghörningar (polygoner) med fler än sex hörn!

Källa: **Grünbaum och Shepard: Tilings and Patterns. Freeman and Co, 1987.**

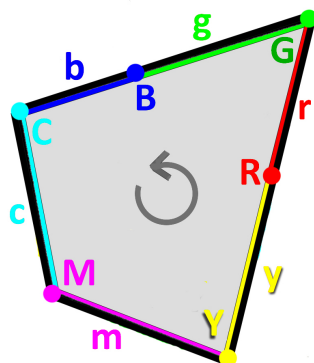
Det finns senare upplagor. Kolla på nätet!

I likhet med denna bok betecknar vi en planfyllande platta med PX-nr, där X är antal hörn (3,4,5 eller 6) och nr är plattans nummer i bokens katalog (sidorna 482-486). Det första exemplet ovan är **P4-28**.

I det följande kallas en planfyllande konvex polygon för **plattmodell**.

Ett komplicerat exempel (P4 - 15)

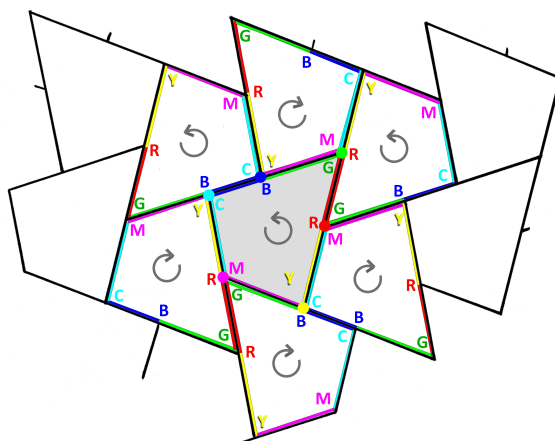
Vi tar nu ett andra, något mer komplicerat exempel med en konvex fyrhörning (tetragon).



För att denna tetragon skall vara planfyllande krävs följande:

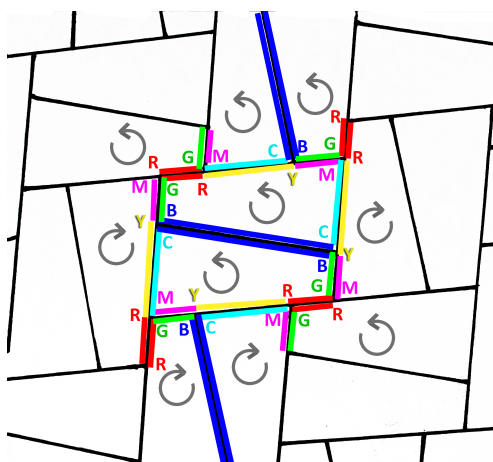
$$R = B = 180^\circ, G + M = C + Y = 180^\circ, \text{ och } g = m, c = y \quad (2)$$

Plattmodellen ovan är **P4-15** i ovan nämnda bok. Plattorna fästs samman i punkterna R, G, M och B, C, Y. Vi noterar detta förhållande genom att skriva (R,G,M), (B,C,Y). Hur kanterna gränsar intill varandra noterar vi genom att skriva (r), (g,m), (b), (c,y). Figuren nedan visar hur och varför.



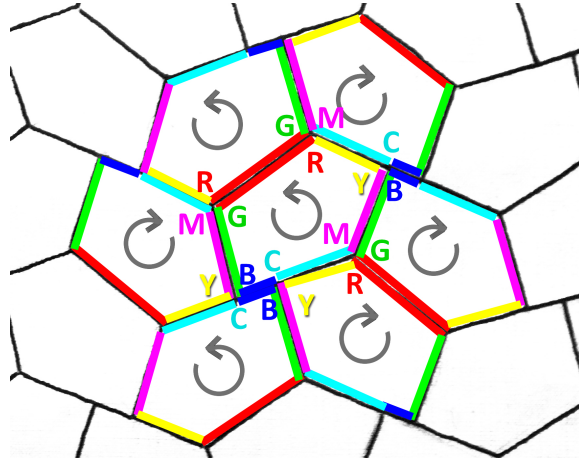
Observera att randen i tetragonen i mitten är orienterad moturs, medan randen i fyra av kopiorna är orienterad i motsatt riktning (medurs alltså). Dessa fyra tetragoner är således spegelvända versioner av tetragonen i mitten.

Plattmodell P4 - 16



Vinklar: $R = Y = 180^\circ, C + B = G + M = 180^\circ$. Kanterlängder: $g = m, c = y$.
Fästpunkter: $(R, G, M), (B, C, Y)$. Kanter: $(r), (g, m), (b), (c, y)$.

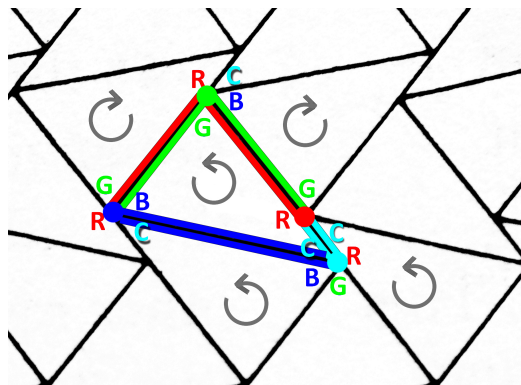
Plattmodell P5 - 11



Vinklar: $B + Y = 180^\circ$, $C = 180^\circ$. Kanterlängder: $g = m$, $c = y$.
Fästpunkter: (R, G, M) , (B, C, Y) . Kanter: (r) , (g, m) , (b) , (c, y) .

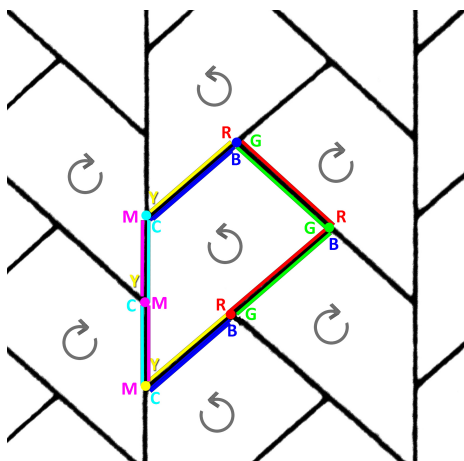
Fler exempel på plattmodeller

Plattmodell P3 - 5



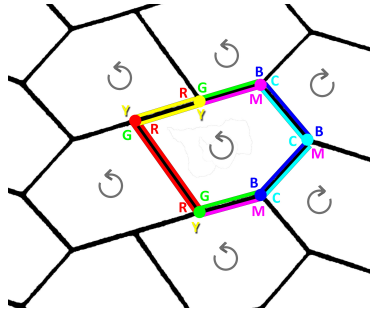
Vinklar: $R = 180^\circ$, $G + B + C = 180^\circ$. Kanterlängder: $r = g$.
Fästpunkter: (R, G, B, C) . Kanter: (r, g) , (b) , (c) .

Plattmodell P4 - 1



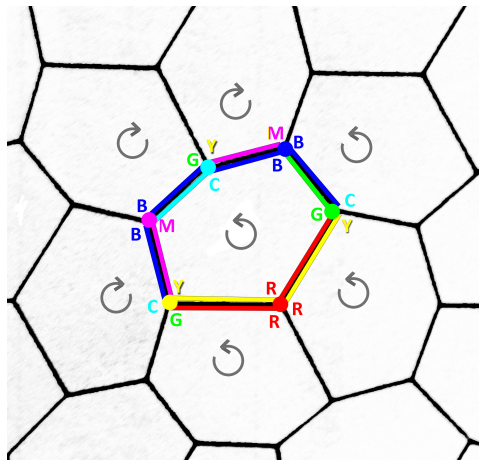
Vinklar: $R = M = 180^\circ$, $G + B = C + Y = 180^\circ$. Kanterlängder: $r = g$, $b = y$, $c = m$.
Fästpunkter: (R, G, B) , (C, M, Y) . Kanter: (r, g) , (b, y) , (c, m) .

Plattmodell P5 - 6



Vinklar: $B + C + M = 360^\circ$, $Y = R + G = 180^\circ$. Kantlängder: $g = m, b = c$.
 Fästpunkter: $(R, G, Y), (B, C, M)$. Kanter: $(r), (g, m), (b, c), (y)$.

Plattmodell P6 - 11



Vinklar: $R = B = M = 120^\circ$, $G + C + Y = 360^\circ$. Kantlängder: $r = y, g = b = c = m$.
 Fästpunkter: $(R), (G, C, Y), (B, M)$. Kanter: $(r, y), (g, b), (b, m), (c, b)$.